

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN PHYSIQUE

PAR
JÉRÉMIE MATHIEU

LE PROBLÈME QUANTIQUE BICOMPLEXE DU POTENTIEL DE COULOMB

AOÛT 2012

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

Résumé

Dans ce mémoire, sont rassemblés une bonne partie de mes travaux de maîtrise portant sur la mécanique quantique bicomplexe. Les nombres bicomplexes sont la généralisation multicomplexe d'ordre deux des nombres complexes. Lorsqu'ils sont munis de l'addition et de la multiplication standard, ils forment une structure algébrique d'anneau commutatif avec unité et sont une des multiples généralisations des nombres réels connues. L'idée d'utiliser une algèbre de dimension supérieure à celle des nombres complexes pour élaborer le formalisme mathématique de la mécanique quantique remonte à près de quatre-vingts ans. Toutefois, l'utilisation des nombres bicomplexes à cette fin est une idée qui a moins de dix ans. La résolution du problème de l'oscillateur harmonique quantique dans un espace de Hilbert bicomplexe a constitué le premier accomplissement majeur de ce projet ambitieux.

Ce mémoire, de type *par article*, s'inscrit dans la continuité de ces travaux de généralisation. Il présente, par une approche axiomatique, la solution différentielle complète du problème quantique bicomplexe du potentiel de Coulomb et la moitié de sa solution algébrique.

Abstract

In this master's thesis, is gathered a great part of my work on bicomplex quantum mechanics. Bicomplex numbers are the second order multicomplex generalization of complex numbers. Equipped with the standard addition and multiplication, they form an algebraic structure called a commutative ring with unity and are one of many known generalizations of the real number system. It has been almost eighty years since it's been proposed to use an algebra of a superior dimension than the one of complex numbers to construct the mathematical formalism of quantum mechanics. However it's only been since less than a decade ago that the idea of using the bicomplex numbers to do so has been seriously considered. In that sense, the complete resolution of the quantum harmonic oscillator in a bicomplex Hilbert space was the first major achievement of this ambitious project.

This thesis, *by article* style, is a continuation of this work of generalization. It presents, by an axiomatic approach, the complete differential solution of the bicomplex quantum Coulomb potential problem and half of its algebraic solution.

Remerciements

Sur le plan académique, mes plus grands remerciements vont en premier lieu à mon directeur de recherche, le professeur Louis Marchildon. Sa rigueur, son éthique scientifique ainsi que sa pensée claire et ordonnée seront toujours une source d'admiration et d'inspiration. Merci d'avoir accepté de me diriger dans ce projet de recherche. En second lieu, merci beaucoup à mon codirecteur, le professeur Dominic Rochon, pour son soutien, son enthousiasme et la motivation qu'il a su me transmettre.

D'un point de vue financier, je remercie particulièrement les professeurs Dominic Rochon, Louis Marchildon, Alfred Michel Grundland, Richard Chahine et Sébastien Tremblay pour les différents contrats d'embauche qu'ils m'ont permis d'obtenir. Je voudrais également remercier la fondation de l'UQTR pour l'octroi d'une bourse d'accueil de premier cycle et d'une bourse d'études de cycles supérieurs.

Plus personnellement, je remercie profondément mon ami Jean-Sébastien Boisvert, pour toutes ces années d'études passées ensemble et nos innombrables discussions physiques et mathématiques toujours enrichissantes. Par la suite, merci au professeur Adel Fadel Antippa pour son approche humaine et dynamique à l'enseignement. Merci sincèrement d'avoir cru en mes capacités et de m'avoir partagé votre vision unique de la physique. Finalement, merci inestimablement à ma mère Josée, mon beau-père Jean, mon frère Guillaume et ma copine Marie-Eve pour m'avoir toujours supporté, particulièrement dans les moments les plus difficiles.

À ma petite chérie

*We begin to get the feeling that we know as much
about nature and its potential phenomena as a
penguin knows of the effects of forest fire, or of
nuclear fusion. –Lee Smolin [1, p.63]*

Table des matières

Résumé	iii
Abstract	v
Remerciements	vii
Table des matières	xi
Liste des tableaux	xiii
1 Introduction	1
1.1 Motivations	2
1.1.1 Les fondations de la physique	2
1.1.2 Les systèmes de nombres	4
1.1.3 La qualité d'une théorie	8
1.1.4 Le problème de Coulomb	11
1.2 La structure du mémoire	13
2 L'algèbre et l'analyse bicomplexe	15
2.1 Les nombres	16
2.2 L'analyse	23
2.3 Les modules	26
3 Présentation de l'article	29
The bicomplex quantum Coulomb potential problem	30

4 Conclusion	53
Bibliographie	55
A Programmes Mathematica	61
A.1 Fonctions radiales hyperboliques	61
A.1.1 Composantes idempotentes, cas standard	61
A.1.2 Surfaces hyperboliques générales	64
A.1.3 Surfaces hyperboliques standard	70
B Quelques preuves	77
B.1 Le symbole de Levi-Civita	77
B.2 Certains commutateurs	81
B.3 Preuves de (21) à (25)	84

Liste des tableaux

2.1	Table de Caley des unités imaginaires $\{1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}\}$	16
2.2	Propriétés d'un module.	27

Chapitre 1

Introduction

*Whereas physics consists in the analysis of the
physical world, philosophy consists in the
analysis of our knowledge of the physical world.*

–Hans Reichenbach [2, p. vii]

Comment est le monde ? Comment peut-il être ? Comment est-il devenu ce qu'il est ? Qu'est-ce que la réalité ? Quelles sont les lois qui régissent le fonctionnement de l'Univers ? Quels sont les processus nécessaires à l'apparition de la vie et à l'accession à l'intelligence ? Existe-t-il une théorie ultime capable de tout expliquer ? Voilà, entre autres, les questions fondamentales auxquelles la physique se propose de répondre. Les réponses sont vraiment très loin d'être simples et brèves. Elles sont essentiellement l'aboutissement de plus de deux mille quatre cents ans de réflexion et d'accumulation de connaissances sur l'Univers, ses constituants, son fonctionnement et son histoire [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17]. À l'époque de la Grèce antique, on appelait *philosophie naturelle* les diverses façons de réfléchir sur le fonctionnement de la nature et du monde qui nous entoure. Une partie non négligeable de toute théorie physique est philosophique et repose sur des idées purement abstraites. Toutefois, afin de mieux connecter l'ensemble de ces idées avec l'Univers et son comportement, il faut également lui greffer un formalisme mathématique qui est en mesure de faire des

prédictions vérifiables à l'aide d'observations. C'est ce dernier point qui différencie fondamentalement la physique de la philosophie et qui lui confère la puissance et l'applicabilité de cette théorie qui réussit si bien à expliquer et à modéliser le monde.

Dans ce chapitre, un résumé, parsemé d'un soupçon d'histoire et d'une façon de concevoir la physique, ainsi que la nature du problème de Coulomb, seront d'abord exposés. Cette réflexion physico-philosophique constituera le contexte de motivation du présent mémoire. Par la suite, la structure de ce dernier sera développée un peu plus en détail.

1.1 Motivations

Voici, *a priori* et/ou *a posteriori*, quelques réflexions conceptuelles et philosophiques qui peuvent constituer une source de motivation à entamer ou à poursuivre des recherches en physique théorique et plus précisément en mécanique quantique bicomplexe.

1.1.1 Les fondations de la physique

La mécanique quantique, et toute théorie physique en général, sont construites à partir de deux éléments profondément interconnectés. D'une part, elles consistent toujours en un ensemble de principes et de postulats, c'est-à-dire des énoncés dont on ne peut pas démontrer la véracité, mais qu'on accepte tout de même comme étant valides. Ces postulats peuvent être soit des énoncés mathématiques, *i.e.* des axiomes, ou encore des idées purement philosophiques [2, 18]. Ces principes de base et ces axiomes servent de briques fondamentales à l'élaboration du formalisme mathématique, qui pour sa part, constitue le second élément de ce que nous appelons les fondations

d'une théorie physique. Ce formalisme confère les outils nécessaires à faire des prédictions qualitatives, mais surtout quantitatives, vérifiables sur les phénomènes qui régissent la nature. Il est souvent déterministe dans ses prédictions, comme en relativité [19, 20] et en mécanique classique [21, 22], où il apparaît sous forme de lois temporellement ou spatialement causales, c'est-à-dire des équations dont l'évolution dépend explicitement du temps et de l'espace. Par contre en mécanique quantique, il est probabiliste et fait intervenir des lois statistiques dont les prédictions sont régies par le hasard et par les règles des probabilités [23, 24].

L'interprétation du formalisme et de ses liens avec la conception philosophique est la partie la plus subjective de l'analyse des fondations de la physique. Or, contrairement à l'interprétation de la mécanique classique qui n'est pas très controversée, en mécanique quantique, il existe plusieurs écoles de pensée qui ont des explications parfois bien différentes les unes des autres du même concept ou du même événement analysé. En particulier, l'interprétation de la mécanique quantique s'intéresse à trois problèmes : la signification du vecteur d'état (ou de la fonction d'onde), les corrélations sur de longues distances (l'intrication) et le problème de la mesure (le chat de Schrödinger). Il existe une école de pensée qui soutient l'idée que seul l'aspect calculatoire et sa capacité à connecter avec l'expérimentation importe et devrait être analysé. D'autres chercheurs comme Louis Marchildon [25, 26] semblent penser, au contraire, que ces questions sont importantes et doivent être investiguées. Quoiqu'il en soit, elles ne seront pas abordées plus en détails dans ce mémoire.

Il existe plusieurs théories physiques reliées à différents ensembles de phénomènes qui modélisent plus ou moins adéquatement une partie de l'Univers selon l'échelle de grandeur analysée : microscopique, mésoscopique, macroscopique ou encore cosmologique. Le célèbre physicien Stephen Hawking précise [6, p. 58] :

There seems to be no single mathematical model or theory that can describe every aspect of the universe. Instead, as mentioned in the opening chapter, there seems to be the network of theories called M-theory.

D'une certaine façon, la physique est le réseau que forment ces théories ainsi que l'étude des différents liens qui les unissent. La mécanique quantique est une de ces théories qui réussit particulièrement bien dans le domaine microscopique à expliquer les résultats expérimentaux des phénomènes atomiques, subatomiques et moléculaires. Un champ d'études où, au début du vingtième siècle, la mécanique classique avait échoué et où la nécessité d'une nouvelle théorie, qui intégrerait bien le caractère discrétisé de la nature à cette échelle, s'est fait ressentir plus que jamais auparavant.

Il arrive parfois que le raisonnement intuitif pur et l'exploration mathématique à eux seuls conduisent à l'établissement de bonnes théories scientifiques ou, du moins, qu'ils permettent une avancée significative en ce sens. On appelle *approche axiomatique* ce processus de pensée qui consiste à émettre un certain nombre d'hypothèses *ad hoc* puis de tester la qualité et de vérifier la cohérence de la théorie une fois la structure complète obtenue. Cette approche est souvent très instructive pour voir les choses différemment et vise à identifier clairement quel est le système minimal d'axiomes qu'il faut utiliser. Toutefois, la plupart du temps, c'est dans l'autre sens et par un raisonnement déductif basé sur l'observation quantitative, l'analyse des données et la construction de modèles adaptés que les théories se développent.

Dans cette section et puisque l'article présenté dans ce mémoire porte surtout sur ce point, nous allons nous concentrer à analyser et à élaborer la nature du formalisme mathématique, particulièrement son élément le plus important : le système de nombres.

1.1.2 Les systèmes de nombres

Plusieurs idées de cette sous-section sont une reformulation par l'auteur de ce mémoire des idées présentées dans l'impressionnant et passionnant ouvrage de Roger Penrose [17].

Un système de nombres est au coeur de chaque théorie physique. C'est le concept fondamental sur lequel on s'appuie pour construire les structures algébriques du formalisme mathématique. Le système de nombres le plus fondamental et celui qui est utilisé pour dériver tous les autres est celui des nombres naturels $\{0, 1, 2, \dots\}$. La façon dont l'humanité en est venue à accepter le concept du néant, qu'on appelle *zéro*, comme étant un nombre naturel ainsi que les multiples conséquences que celui-ci a eues sur le développement des mathématiques est une histoire vraiment passionnante [27].

Le plus connu et le plus utilisé des systèmes de nombres en physique est sans contredit le système des nombres réels. C'est un concept mathématique qu'on trouve inévitablement dans les fondements de toute théorie physique. Sa propriété d'ordinalité, c'est-à-dire la possibilité de pouvoir comparer la grandeur relative de deux nombres et de les ordonner l'un par rapport à l'autre, confère à ce système une caractéristique requise pour expliquer la nature. Plus précisément, le physicien Geoffrey Hemion dit [28, p. 1375] :

Physical laws, even reason itself, has to do with the idea of cause and effect. If one event is part of the cause of another, then it must come before it in time. This causal structure then is the basic reason why real numbers are relevant in the study of physical space.

Qui plus est, la non-dénombrabilité des nombres réels est fondamentale pour représenter la continuité de l'espace et du temps si chère à tant de théories physiques macroscopiques et mésoscopiques. Lorsqu'ils l'ont découvert bien malgré leurs croyances mystiques, à l'aide du théorème de Pythagore, les Grecs de l'Antiquité ont cherché à extraire ce nouveau type de nombre directement de la nature. Effectivement, c'est le mathématicien Eudoxos qui est le premier à avoir dérivé le concept de nombre réel à partir de la géométrie euclidienne et de la notion de distance qui y est définie. Ceci était tout à fait naturel étant donné qu'en première approximation, l'espace dans lequel on vit semble satisfaire cette géométrie. Toutefois, le théoricien Penrose nous signale qu'avec cette approche, il y a un problème fondamental [17, p. 58] :

In order to know the nature of the numbers according to which geometrical

distance is to be defined, for example, it would be necessary to know what happens both at indefinitely tiny and indefinitely large distances.

Malheureusement, puisqu'on ne sait pas ce qui se passe à ces deux extrémités du concept de distance physique, il est beaucoup plus pratique et raisonnable de définir les nombres réels à partir de l'union des nombres rationnels et irrationnels, se libérant ainsi de toute géométrie particulière que peut satisfaire la nature. Lorsqu'il est muni de l'addition et de la multiplication standard, l'ensemble des nombres réels forme un corps ordonné [29]. En particulier, ces nombres permettent de définir le processus de limite, un concept qui est fondamental pour la dérivée et l'intégrale. Puisque toutes les théories physiques dynamiques qui expliquent bien la nature ont recours au calcul différentiel et intégral ou à des versions discrétisées de celui-ci, c'est précisément ce qui donne sa force et son statut si universel au système des nombres réels.

Toutefois, rien dans la connaissance physique actuelle ne semble suggérer que les nombres réels soient encore adaptés à décrire correctement le monde en deçà d'une échelle de grandeur de 10^{-17} m et au delà de 10^{26} m. Effectivement, la mécanique quantique nous a fait découvrir le caractère quantifié de certaines observables de la nature à l'échelle microscopique. Encore plus loin dans l'univers du petit, Lee Smolin nous explique qu'à l'échelle de Planck, c'est-à-dire à environ 10^{-35} m et 10^{-43} s où les effets de la gravité et ceux dus aux phénomènes quantiques sont aussi importants, la théorie de la gravité quantique suggère que l'espace et le temps sont inévitablement discrétisés [1, p. 62] :

The Planck length is [...] 20 orders of magnitude smaller than an atomic nucleus. [...] A blink of an eye has more fundamental moments than there are atoms in Mount Everest.

En comparaison avec cette échelle de grandeur, nous sommes absolument gigantesques et tout ce que nous percevons de la réalité est extrêmement lent et froid. Quoi qu'il en soit, depuis plus de deux mille quatre cents ans et selon les meilleures théories actuelles, les nombres réels ont été et sont encore un concept fondamental dans notre compréhension du monde physique.

Un peu comme la découverte de $\sqrt{2}$ et des nombres irrationnels en général ont conduit les Grecs anciens à développer les nombres réels, la découverte et l'acceptation de $\sqrt{-1}$ comme étant un nombre imaginaire ont conduit les mathématiciens du seizième siècle à formaliser un nouveau type de nombres appelés complexes. Par contre, contrairement aux nombres réels, pendant plus de trois cent cinquante ans, rien dans la nature ne semblait promouvoir l'utilisation des nombres complexes pour la décrire. Ceux-ci étaient étudiés exclusivement pour leur richesse en termes de propriétés algébriques et pour leur élégance mathématique. Sur ce point, Penrose nous fait remarquer que [17, p. 73] :

It would, no doubt, have come as a great surprise to all those who had voiced their suspicion of complex numbers to find that, according to the physics of the latter three-quarters of the 20th century, the laws governing the behaviour of the world, at its tiniest scales, is fundamentally governed by the complex-number system.

Cette généralisation des nombres réels semblent permettre d'accéder à une meilleure et plus profonde compréhension de l'Univers. En particulier, en mécanique quantique, le formalisme consiste en des espaces de Hilbert qui sont généralement construits en s'appuyant sur le corps non-ordonné des nombres complexes. Lorsqu'ils font intervenir les vecteurs d'état, ou encore les fonctions d'onde, ces structures sont appelés espaces d'états. Ces derniers représentent l'ensemble des configurations physiques dans lesquelles peut se trouver un système quantique. Le produit scalaire permet de calculer la probabilité de mesurer le système dans un état particulier. On reconnecte avec les nombres réels en requérant que le produit scalaire d'un vecteur d'état avec lui-même soit une quantité réelle positive. On impose également l'hermiticité des opérateurs agissant dans ces espaces d'état ce qui garantit que leurs valeurs propres sont réelles et représentent bien les grandeurs physiques observables [23, 24].

En 1843, le mathématicien et physicien irlandais William Rowan Hamilton a développé une nouvelle algèbre de dimension quatre qui généralise les nombres complexes. On a appelé ce nouveau système de nombre *quaternions*. L'idée d'utiliser les

quaternions pour généraliser le formalisme de la mécanique quantique a premièrement été proposée par Birkhoff et von Neumann [30]. Il a fallu environ soixante ans pour que cette idée soit extensivement explorée dans l’ouvrage de Adler [31]. Malheureusement, comme nous le fait remarquer Penrose [17, p. 200] :

[...] the original “pure quaternions” still have not lived up to what must undoubtedly have initially seemed to be an extraordinary promise.

Il existe maintenant un nombre significatif de généralisations d’ordre supérieur à celle des nombres complexes qu’on appelle en général nombres *hypercomplexes*. On pense par exemple aux nombres duaux, hyperboliques, multicomplexes, octonions, sédénions, etc [32]. Ces nombres sont utilisés dans toutes sortes de domaines de la physique pour généraliser le formalisme ou bien pour donner une nouvelle perspective sur la solution à un problème particulier [33, 34, 35]. Dans ce mémoire, nous allons présenter les nombres bicomplexes, le concept fondamental de la généralisation de la mécanique quantique proposée ici [36] et entamée dans [37, 32, 38, 39, 40, 41].

En conclusion, les nombres sont un concept abstrait qui appartient au « monde des formes mathématiques de Platon » et qui n’a pas besoin d’être extrait directement de l’analyse du monde physique. Toutefois, tel que nous allons le voir dans la section suivante, c’est leur abilité à modéliser convenablement le monde qui constitue l’ultime raison de leur utilisation universelle en physique.

1.1.3 La qualité d’une théorie

Pour le philosophe grec ancien Platon et pendant près de deux mille ans, il était généralement accepté que l’expérimentation n’était pas nécessaire pour comprendre comment fonctionne le monde. Toutefois, au seizième siècle, les travaux sur la chute des corps, l’inertie et le principe de relativité de Galileo Galilei nous ont appris l’importance de l’observation comme étant la voie incontournable vers une meilleure com-

préhension de la nature [42]. En effet, c'est précisément la capacité à prédire et à expliquer les résultats d'expériences qui constitue le facteur principal déterminant la qualité d'une théorie. Comme disait l'astrophysicien et communicateur scientifique Hubert Reeves [7, p. 225] :

*L'adaptation au réel, la capacité de rendre compte avec la plus grande précision des observations, est le critère ultime de la vérité scientifique.
[...] La nature n'a pas à s'adapter à notre façon de penser. C'est à nous de changer notre façon de penser pour qu'elle s'adapte à la nature.*

Autrement dit, la qualité d'une théorie est directement proportionnelle à l'accord entre les prédictions de son formalisme mathématique et les observations expérimentales. En ce sens, il devient clair que le processus déductif et observationnel est le choix le plus naturel qu'il est possible de faire pour construire, justement, une théorie qui explique bien le monde.

Il existe également un principe de base qui est déterminant dans l'élaboration d'une théorie physique. Quoi que sa paternité soit plutôt controversée, le principe du rasoir d'Ockham, généralement attribué au logicien William de la ville d'Ockham au quatorzième siècle, s'énonce originellement en latin comme suit : *Entia non sunt multiplicanda, propter necessitatem*, ce qui signifie que les entités ne devraient pas être multipliées inutilement [43]. En science, le rasoir d'Ockham est utilisé comme une sorte de critère de sélection naturelle pour les théories. Plusieurs scientifiques ont adopté et reformulé ce principe en une version de leur cru. Dans le troisième livre des célèbres *Principes mathématiques de la philosophie naturelle : Sur le système du monde*, Isaac Newton l'énonce comme sa première règle sur le raisonnement philosophique [44, p. 384] :

We are to admit no more causes of natural things than such as are both true and sufficient to explain their appearances.

À travers le principe du rasoir d'Ockham, le premier facteur déterminant la qualité d'une théorie physique nous conduit inexorablement au second, la beauté. Cette notion plutôt subjective est souvent associée, mélangée ou combinée avec les concepts de

simplicité, de symétrie, d'élégance et de cohérence. On n'a qu'à regarder un paysage naturel, une fleur, une montagne, le désert, la mer, le ciel ou la vie en général pour constater que ces caractéristiques sont omniprésentes. La beauté constitue certainement une caractéristique recherchée dans l'élaboration d'une théorie physique, particulièrement dans son formalisme mathématique. En ce sens, Paul Adrien Maurice Dirac s'exprime ainsi [45, p. 2-3] :

The research worker, in his efforts to express the fundamental laws of Nature in mathematical form, should strive mainly for mathematical beauty. He should still take simplicity into consideration in a subordinate way to beauty. [...] It often happens that the requirements of simplicity and of beauty are the same, but where they clash the latter must take precedence.

Pourquoi le formalisme mathématique d'une théorie physique devrait-il être simple ? Une réponse pragmatique et quelque peu naïve est parce que nous sommes humains et que naturellement, nos capacités intellectuelles sont inévitablement limitées. Les mathématiques sont un domaine où la complexité est théoriquement infinie. En la gardant simple, on maximise le nombre de liens qu'on peut faire entre le formalisme, les principes de bases et l'expérience, augmentant subséquemment nos chances de compréhension du monde. À propos de la simplicité, Albert Einstein autocritique son dernier ouvrage comme suit [46, p. 162-163] :

In my opinion the theory presented here is the logically simplest relativistic field theory which is at all possible. But this does not mean that nature might not obey a more complex field theory. More complex field theories have frequently been proposed. [...] In my view, such more complicated systems and their combinations should be considered only if there exist physical-empirical reasons to do so.

En ce sens, pour Einstein, il est évident que la simplicité devrait être considérée comme un critère de qualité inférieure à la confirmation expérimentale. Une raison plus profonde à la question de la simplicité en physique est développée dans un article de Murray Gell-Mann. Selon lui, à toute échelle de grandeur, la nature nous montre qu'elle est conforme à elle-même et qu'elle exhibe des propriétés qui sont similaires

d'un niveau énergétique à l'autre. Par exemple, la force de gravitation universelle de Newton et la force électrostatique de Coulomb sont toutes deux inversement proportionnelle au carré de la distance, mais sont relativement efficaces dans différents ordres de grandeur. Terminons cette sous-section en citant ce codécouvreur du quark [47, p. 12] :

All three principles – the conformability of nature to herself, the applicability of the criterion of simplicity, and the utility of certain parts of mathematics in describing physical reality – are thus consequences of the underlying law of the elementary particles and their interactions. Those three principles need not be assumed as separate metaphysical postulates. Instead, they are emergent properties of the fundamental laws of physics.

1.1.4 Le problème de Coulomb

En 1785, le physicien français Charles Augustin Coulomb mettait expérimentalement en évidence la dépendance inversement proportionnelle au carré de la distance de la force électrostatique [48]. C'est dans une expérience célèbre qui passa à la postérité et en utilisant une balance à torsion qu'il jettait les bases théoriques de l'électromagnétisme, une théorie qui allait s'établir comme un des plus grands paradigmes en physique. L'expérience consistait essentiellement à approcher deux sphères similairement chargées et à mesurer la dépendance spatiale de la force de répulsion. Il a toutefois fallu attendre en 1812 pour qu'un des pères de la physique mathématique, Siméon Denis Poisson, unifie la loi de Coulomb aux méthodes mathématiques de son professeur Pierre-Simon Laplace en une théorie du potentiel électrique [49, 50].

En général, on définit un problème de Coulomb comme tout problème physique faisant intervenir deux particules (ou plus) dans (au moins) un potentiel central dont la dépendance est précisément inversement proportionnelle à la distance. On doit alors décrire leurs interactions ainsi que calculer les grandeurs physiques associées. Ce

potentiel est extrêmement important, car il sous-entend directement que le problème satisfait à une propriété de symétrie sphérique. En raison du désir d'accession à la simplicité, les symétries sont généralement très prisées par les physiciens.

Au début du vingtième siècle, la mécanique classique et l'électrodynamique avaient échoué à expliquer correctement le fonctionnement de la structure interne du problème coulombien des atomes. C'est à Niels Bohr, à Erwin Schrödinger et à Wolfgang Ernst Pauli qu'on doit le premier et certainement un des plus grands accomplissements de la mécanique quantique que de réussir à faire cela mathématiquement, pour l'atome d'hydrogène, en utilisant exclusivement des principes physiques généraux. En particulier, la solution quantique était en très bon accord avec le spectre de l'atome d'hydrogène lorsqu'il est irradié par des ondes électromagnétiques [51]. Le physicien Arthur Beiser nous explique pourquoi il est important de comprendre l'atome [52, p. 120] :

In this chapter and in others to come our chief concern will be the structure of atom, since it is this structure that is responsible for nearly all the properties of matter that have shaped the world around us.

Comprendre l'atome, c'est mieux comprendre le monde. On n'a qu'à penser au laser et à ses multiples applications. Or, en raison du lien profond et mystérieux qui existe entre le formalisme mathématique et le monde physique [53], même aujourd'hui, l'atome n'est pas encore complètement bien compris. En ce sens, il semble pertinent d'explorer les généralisations du problème de Coulomb. À l'instar de certains qui ont choisi de généraliser la dimension spatiale du problème [54], nous avons choisi de généraliser le système de nombres à une dimension supérieure. Finalement, Penrose souligne que [17, p. 59] :

There is a profound issue that is being touched upon here. [...] it is normally not possible to examine the physical world itself in such precise detail that appropriately clear-cut mathematical notions can be abstracted directly from it.

Dans cet ordre d'idées, toute exploration en physique mathématique est pertinente, puisqu'on ne sait pas lesquelles des découvertes associées vont parvenir à décrire correctement le monde. Cela constitue l'ultime justification de ce mémoire.

1.2 La structure du mémoire

La structure du présent mémoire par article, de par sa nature, diffère assez significativement de celle d'un mémoire de type essai conventionnel. En particulier, il contient beaucoup moins de chapitres et il est axé sur une présentation de son élément principal et sur des résultats complémentaires.

Plus précisément, dans le chapitre 2, une introduction des nombres bicomplexes plus détaillée que celle qui est faite dans l'article est présentée. Nous y mettons l'accent sur les liens entre les différentes représentations, effectuons la preuve de certains résultats, explorons un peu plus les fonctions, le calcul différentiel et intégral ainsi que les modules bicomplexes. Le chapitre 3 est dédié à présenter l'article en question, ce qui représente la majeure partie du travail de maîtrise effectué. Une petite introduction détaillant les contributions de chaque auteur précédera. Nous concluons ce mémoire au chapitre 4 en ouvrant sur l'espoir que cette algèbre bicomplexe conduise à une généralisation complète du formalisme mathématique de la mécanique quantique. L'annexe A présente trois programmes informatiques qui ont été écrits pour représenter les solutions radiales hyperboliques du problème de Coulomb. Finalement, l'annexe B contient la preuve en détails des relations (21) à (25) de notre article [36] avec l'indice s supprimé ainsi que quelques lemmes nécessaires pour y parvenir.

Chapitre 2

L'algèbre et l'analyse bicomplexe

*The understanding that we have of the principles
that actually underlie the behaviour of our
physical world indeed depends upon some
appreciation of its mathematics.
—Roger Penrose [17, p. xv]*

En 1892, Corrado Segre a développé une algèbre de dimension infinie dont il a nommé les éléments nombres bicomplexes, tricomplexes et n -complexes en général. C'est la classe de nombres qu'on appelle aujourd'hui les multicomplexes d'ordre n . En 1928 et 1932, Michiji Futagawa semble être le premier à avoir considéré des fonctions d'une variable bicomplexe [55]. Les nombres bicomplexes forment la plus simple algèbre qui généralise les nombres réels, mais qui n'est pas une algèbre de division ni une algèbre à valeur absolue. La référence actuelle ultime en la matière est sans aucun doute le livre de Griffith Baley Price [56]. En 2004, Dominic Rochon et Michael Shapiro ont écrit un article instigateur en ce domaine qui résume bien plusieurs propriétés analysées par Price en plus d'en présenter quelques autres [57]. D'ailleurs, mentionnons que la majorité des notions définies dans ce chapitre et des propriétés qui en découlent se retrouvent dans ces deux références.

Dans ce chapitre, en plus de présenter l'algèbre des nombres bicomplexes, nous allons également présenter quelques résultats intéressants qui sont complémentaires à l'article [36] et qui ne savaient pas comment trouver leur place dans celui-ci.

2.1 Les nombres

Il existe au moins trois façons complètement différentes les unes des autres, mais tout de même équivalentes, de définir un nombre bicomplexe α [56, 57]

$$\alpha := \begin{cases} a_\alpha + b_\alpha \mathbf{i}_1 + c_\alpha \mathbf{i}_2 + d_\alpha \mathbf{j}, & a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha, d_\alpha \in \mathbb{R} \\ z_\alpha + z'_\alpha \mathbf{i}_2, & z_\alpha, z'_\alpha \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1) \\ \alpha_{\widehat{1}} \mathbf{e}_1 + \alpha_{\widehat{2}} \mathbf{e}_2, & \alpha_{\widehat{1}}, \alpha_{\widehat{2}} \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1) \end{cases} \quad (2.1)$$

La première définition de (2.1) établit la représentation d'un nombre bicomplexe comme une généralisation quadridimensionnelle des nombres réels. La deuxième est le résultat d'une *complexification* des nombres complexes où on a transformé la partie réelle et la partie imaginaire habituelle par des nombres complexes en \mathbf{i}_1 et où on a introduit l'unité imaginaire \mathbf{i}_2 . La dernière représentation, sur la base idempotente $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, est définitivement un cadeau hautement simplificateur qui nous est offert par cette algèbre. Les unités imaginaires $\{1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}\}$ sont, par définition, linéairement indépendantes deux à deux et satisfont à la table de Caley suivante

·	1	\mathbf{i}_1	\mathbf{i}_2	\mathbf{j}
1	1	\mathbf{i}_1	\mathbf{i}_2	\mathbf{j}
\mathbf{i}_1	\mathbf{i}_1	-1	\mathbf{j}	$-\mathbf{i}_2$
\mathbf{i}_2	\mathbf{i}_2	\mathbf{j}	-1	$-\mathbf{i}_1$
\mathbf{j}	\mathbf{j}	$-\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_1$	1

TABLEAU 2.1 – Table de Caley des unités imaginaires $\{1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}\}$.

En définissant

$$\mathbf{e}_1 := \frac{1 + \mathbf{j}}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_2 := \frac{1 - \mathbf{j}}{2}, \quad (2.2)$$

et en utilisant $\mathbf{j}^2 = 1$ (du tableau 2.1), il est très facile de vérifier que

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = 0 = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = 1. \quad (2.3)$$

L'addition et la multiplication de deux nombres bicomplexes $\alpha := a_\alpha + b_\alpha \mathbf{i}_1 + c_\alpha \mathbf{i}_2 + d_\alpha \mathbf{j}$ et $\beta := a_\beta + b_\beta \mathbf{i}_1 + c_\beta \mathbf{i}_2 + d_\beta \mathbf{j}$, en vertu de l'indépendance linéaire de ces unités imaginaires, sont respectivement et intuitivement définies par

$$\alpha + \beta := (a_\alpha + a_\beta) + (b_\alpha + b_\beta) \mathbf{i}_1 + (c_\alpha + c_\beta) \mathbf{i}_2 + (d_\alpha + d_\beta) \mathbf{j}, \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \alpha \beta &:= (a_\alpha a_\beta - b_\alpha b_\beta - c_\alpha c_\beta + d_\alpha d_\beta) + (a_\alpha b_\beta + b_\alpha a_\beta - c_\alpha d_\beta - d_\alpha c_\beta) \mathbf{i}_1 \\ &\quad + (a_\alpha c_\beta - b_\alpha d_\beta + c_\alpha a_\beta - d_\alpha b_\beta) \mathbf{i}_2 + (a_\alpha d_\beta + b_\alpha c_\beta + c_\alpha b_\beta + d_\alpha a_\beta) \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Muni de ceci, on peut montrer que les trois définitions (2.1) sont équivalentes deux à deux. En effet, pour montrer que la première équivaut à la deuxième, on peut tout simplement écrire

$$a_\alpha + b_\alpha \mathbf{i}_1 + c_\alpha \mathbf{i}_2 + d_\alpha \mathbf{j} = (a_\alpha + b_\alpha \mathbf{i}_1) + (c_\alpha + d_\alpha \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_2 := z_\alpha + z'_\alpha \mathbf{i}_2.$$

Ensuite, la deuxième représentation se transforme comme suit

$$\begin{aligned} z_\alpha + z'_\alpha \mathbf{i}_2 &= \frac{1}{2} z_\alpha - \frac{\mathbf{j}}{2} z'_\alpha \mathbf{i}_1 + \frac{1}{2} z_\alpha - \frac{\mathbf{j}}{2} z'_\alpha \mathbf{i}_1 \\ &= \frac{1}{2} z_\alpha + \frac{\mathbf{j}}{2} z_\alpha - \frac{1}{2} z'_\alpha \mathbf{i}_1 - \frac{\mathbf{j}}{2} z'_\alpha \mathbf{i}_1 + \frac{1}{2} z_\alpha - \frac{\mathbf{j}}{2} z_\alpha + \frac{1}{2} z'_\alpha \mathbf{i}_1 - \frac{\mathbf{j}}{2} z'_\alpha \mathbf{i}_1 \\ &= (z_\alpha - z'_\alpha \mathbf{i}_1) \frac{1 + \mathbf{j}}{2} + (z_\alpha + z'_\alpha \mathbf{i}_1) \frac{1 - \mathbf{j}}{2} \\ &= (z_\alpha - z'_\alpha \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + (z_\alpha + z'_\alpha \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2 := \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Notons que α_1 et α_2 sont des nombres complexes dans $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ et leur expression exacte est arbitraire, tout comme celle de z_α et z'_α l'est. Plus précisément, α_1 et α_2 sont respectivement les projections idempotentes $\mathcal{P}_1(\alpha) : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ et $\mathcal{P}_2(\alpha) : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$.

Pour le moment, nous ne savons pas encore comment définir l'égalité de deux nombres bicomplexes, mais en montrant que la décomposition idempotente est unique, nous allons découler celle-ci de l'égalité de deux nombres complexes. Supposons qu'il existe deux décompositions idempotentes distinctes d'un nombre $\gamma \in \mathbb{T}$, qu'on écrit comme

$$\gamma = (z_{1\gamma} - z'_{1\gamma}\mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + (z_{1\gamma} + z'_{1\gamma}\mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2 = (z_{2\gamma} - z'_{2\gamma}\mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + (z_{2\gamma} + z'_{2\gamma}\mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2, \quad (2.7)$$

où $z_{1\gamma}, z'_{1\gamma}, z_{2\gamma}, z'_{2\gamma}$ sont des nombres complexes arbitraires en \mathbf{i}_1 . D'une part, de (2.3), en multipliant (2.7) par \mathbf{e}_1 , on voit que $[(z_{1\gamma} - z_{2\gamma}) - (z'_{1\gamma} - z'_{2\gamma}) \mathbf{i}_1] \mathbf{e}_1 = 0$. D'autre part, en multipliant (2.7) par \mathbf{e}_2 , on obtient que $[(z_{1\gamma} - z_{2\gamma}) + (z'_{1\gamma} - z'_{2\gamma}) \mathbf{i}_1] \mathbf{e}_2 = 0$. Conséquemment,

$$(z_{1\gamma} - z_{2\gamma}) - (z'_{1\gamma} - z'_{2\gamma}) \mathbf{i}_1 = 0 \quad \text{et} \quad (z_{1\gamma} - z_{2\gamma}) + (z'_{1\gamma} - z'_{2\gamma}) \mathbf{i}_1 = 0.$$

Or, en isolant $(z_{1\gamma} - z_{2\gamma})$ dans la première de ces relations et en remplaçant dans la seconde, il vient que $z'_{1\gamma} = z'_{2\gamma}$. Qui plus est, en isolant $(z'_{1\gamma} - z'_{2\gamma}) \mathbf{i}_1$ dans la seconde et en remplaçant dans la première, on obtient $z_{1\gamma} = z_{2\gamma}$, ce qui implique directement que la décomposition de l'ensemble des nombres bicomplexes \mathbb{T} sur la base idempotente $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ est unique. Ainsi, ce résultat signifie que deux nombres bicomplexes sont égaux si et seulement si leurs composantes idempotentes sont les mêmes.

En vertu des propriétés (2.3), la définition idempotente est de loin la plus pratique pour effectuer des calculs. Avec cette définition, les propriétés prennent une forme

beaucoup plus simple. En effet, l'addition et la multiplication se transforment comme

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1) \mathbf{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2) \mathbf{e}_2 \quad \text{et} \quad \alpha\beta = \alpha_1\beta_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\beta_2\mathbf{e}_2. \quad (2.8)$$

On remarque que (2.8) est particulièrement simplifiée par rapport à l'addition (2.4) et à la multiplication (2.5).

En vertu des propriétés du corps des nombres complexes $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$, l'opération binaire $+$ est fermée, associative et commutative sur \mathbb{T} . Son élément neutre est $0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 = 0$ et tout $\alpha \in \mathbb{T}$ a un inverse additif donné par $-\alpha_1\mathbf{e}_1 - \alpha_2\mathbf{e}_2$. Pour sa part, l'opération binaire \cdot est aussi fermée, associative et commutative sur \mathbb{T} . De plus, elle est distributive sur $+$ et son neutre est $1\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2 = 1$. Toutes ces propriétés font de la structure $(\mathbb{T}, +, \cdot)$ un anneau commutatif avec unité.

Dérivons la propriété de diviseur de zéro à l'aide de la représentation réelle et montrons que la forme trouvée est équivalente à celle de la base idempotente. On a

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \beta &= (a_\alpha + b_\alpha \mathbf{i}_1 + c_\alpha \mathbf{i}_2 + d_\alpha \mathbf{j}) (a_\beta + b_\beta \mathbf{i}_1 + c_\beta \mathbf{i}_2 + d_\beta \mathbf{j}) \\ &= (a_\alpha a_\beta - b_\alpha b_\beta - c_\alpha c_\beta + d_\alpha d_\beta) + (a_\alpha b_\beta + b_\alpha a_\beta - c_\alpha d_\beta - d_\alpha c_\beta) \mathbf{i}_1 \\ &\quad + (a_\alpha c_\beta - b_\alpha d_\beta + c_\alpha a_\beta - d_\alpha b_\beta) \mathbf{i}_2 + (a_\alpha d_\beta + b_\alpha c_\beta + c_\alpha b_\beta + d_\alpha a_\beta) \mathbf{j}. \end{aligned}$$

En posant ceci égal à zéro, on obtient un système de quatre équations

$$\left. \begin{aligned} a_\alpha a_\beta - b_\alpha b_\beta - c_\alpha c_\beta + d_\alpha d_\beta &= 0 \\ a_\alpha b_\beta + b_\alpha a_\beta - c_\alpha d_\beta - d_\alpha c_\beta &= 0 \\ a_\alpha c_\beta - b_\alpha d_\beta + c_\alpha a_\beta - d_\alpha b_\beta &= 0 \\ a_\alpha d_\beta + b_\alpha c_\beta + c_\alpha b_\beta + d_\alpha a_\beta &= 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a_\beta & -b_\beta & -c_\beta & d_\beta \\ b_\beta & a_\beta & -d_\beta & -c_\beta \\ c_\beta & -d_\beta & a_\beta & -b_\beta \\ d_\beta & c_\beta & b_\beta & a_\beta \end{bmatrix}}_B \begin{bmatrix} a_\alpha \\ b_\alpha \\ c_\alpha \\ d_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

En calculant le déterminant de B à l'aide de Mathematica,

$$\det B = a_\beta^4 + b_\beta^4 + 8a_\beta b_\beta c_\beta d_\beta - 2b_\beta^2(c_\beta^2 - d_\beta^2) + 2a_\beta^2(b_\beta^2 + c_\beta^2 - d_\beta^2) + (c_\beta^2 + d_\beta^2)^2.$$

En factorisant,

$$\det B = [(b_\beta + c_\beta)^2 + (a_\beta - d_\beta)^2] [(b_\beta - c_\beta)^2 + (a_\beta + d_\beta)^2]. \quad (2.10)$$

On sait [58] que le système homogène ci-dessus possède une solution non triviale si et seulement si $\det B = 0$. En posant le déterminant égal à zéro,

$$(b_\beta + c_\beta)^2 + (a_\beta - d_\beta)^2 = 0 \quad \text{ou} \quad (b_\beta - c_\beta)^2 + (a_\beta + d_\beta)^2 = 0.$$

Puisque $a_\beta, b_\beta, c_\beta, d_\beta \in \mathbb{R}$,

$$[(b_\beta + c_\beta)^2 = 0 \quad \text{et} \quad (a_\beta - d_\beta)^2 = 0] \quad \text{ou} \quad [(b_\beta - c_\beta)^2 = 0 \quad \text{et} \quad (a_\beta + d_\beta)^2 = 0]$$

On a donc

$$[b_\beta = -c_\beta \quad \text{et} \quad a_\beta = d_\beta] \quad \text{ou} \quad [b_\beta = c_\beta \quad \text{et} \quad a_\beta = -d_\beta].$$

Par conséquent, puisque ceci est valide pour β et α , tous les nombres bicomplexes

$$\beta = a_\beta + b_\beta \mathbf{i}_1 - b_\beta \mathbf{i}_2 + a_\beta \mathbf{j} \quad \text{et} \quad \alpha = a_\alpha + b_\alpha \mathbf{i}_1 + b_\alpha \mathbf{i}_2 - a_\alpha \mathbf{j},$$

sont des diviseurs de zéro l'un par rapport à l'autre. Si on transforme ces nombres dans la troisième représentation, on obtient exactement la forme simple des diviseurs de zéro présentée dans l'article

$$\beta = (a_\beta + b_\beta \mathbf{i}_1) + (-b_\beta + a_\beta \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_2 = [2a_\beta + 2b_\beta \mathbf{i}_1] \mathbf{e}_1 + [0] \mathbf{e}_2 \in \mathcal{NC}, \quad (2.11)$$

$$\alpha = (a_\alpha + b_\alpha \mathbf{i}_1) + (b_\alpha - a_\alpha \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_2 = [0] \mathbf{e}_1 + [2a_\alpha + 2b_\alpha \mathbf{i}_1] \mathbf{e}_2 \in \mathcal{NC}. \quad (2.12)$$

Il suffit de multiplier ces nombres ensemble pour vérifier qu'ils sont des diviseurs de zéro l'un par rapport à l'autre. Notons que c'est le fait qu'il existe des éléments bicomplexes qui sont non inversibles sous la multiplication, *i.e.* les diviseurs de zéro, qui empêche $(\mathbb{T}, +, \cdot)$ d'être un corps. Lorsqu'on développe la mécanique quantique bicomplexe, il suffit de contourner les diviseurs de zéro en requérant qu'aucune des composantes idempotentes ne soit nulle pour éviter une généralisation triviale.

Notons qu'un isomorphisme matriciel des nombres bicomplexes est trivialement donné par

$$\alpha = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 \quad \leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Effectivement, ces quantités s'additionnent et se multiplient de sorte que cette transformation soit un homomorphisme bijectif.

Il existe trois types de conjugaison bicomplexe. Les trois types de conjugaison s'écrivent comme

$$\alpha^{\dagger_1} := \overline{z_\alpha} + \overline{z'_\alpha} \mathbf{i}_2 = (\overline{z_\alpha} - \overline{z'_\alpha} \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + (\overline{z_\alpha} + \overline{z'_\alpha} \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2 = \overline{\alpha_2} \mathbf{e}_1 + \overline{\alpha_1} \mathbf{e}_2, \quad (2.14)$$

$$\alpha^{\dagger_2} := z_\alpha - z'_\alpha \mathbf{i}_2 = (z_\alpha + z'_\alpha \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + (z_\alpha - z'_\alpha \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2 = \alpha_2 \mathbf{e}_1 + \alpha_1 \mathbf{e}_2, \quad (2.15)$$

$$\alpha^{\dagger_3} := \overline{z_\alpha} - \overline{z'_\alpha} \mathbf{i}_2 = (\overline{z_\alpha} + \overline{z'_\alpha} \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + (\overline{z_\alpha} - \overline{z'_\alpha} \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2 = \overline{\alpha_1} \mathbf{e}_1 + \overline{\alpha_2} \mathbf{e}_2, \quad (2.16)$$

où la barre au dessus représente la conjugaison complexe selon \mathbf{i}_1 . Il n'est pas difficile de vérifier que, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{T}$ et $k \in \{1, 2, 3\}$,

$$(\alpha \pm \beta)^{\dagger_k} = \alpha^{\dagger_k} \pm \beta^{\dagger_k}, \quad (\alpha\beta)^{\dagger_k} = \alpha^{\dagger_k} \beta^{\dagger_k} \quad \text{et} \quad (\alpha^{\dagger_k})^{\dagger_k} = \alpha. \quad (2.17)$$

Ceci fait de ces trois conjugaisons des involutions additives et multiplicatives sur l'anneau \mathbb{T} . Toutefois, le troisième type semble le plus simple et le plus pertinent puisqu'il ne permute pas les composantes idempotentes, mais il les conjugue. C'est précisément cette application qui est retenue dans notre généralisation de la mécanique

quantique [37, 36]. On définit la norme réelle d'un nombre bicomplexe α par

$$|\alpha| := \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2}, \quad (2.18)$$

où $|\cdot|$ est la norme réelle de l'analyse complexe. Puisque $|\alpha_s|^2 \geq 0$ pour $s = 1$ et 2 , on voit immédiatement que $|\alpha| \geq 0$. En particulier, $|\alpha| = 0$ si et seulement si α_1 et $\alpha_2 = 0$. De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$,

$$|z\alpha| = |(z\mathbf{e}_1 + z\mathbf{e}_2)(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{|z\alpha_1|^2 + |z\alpha_2|^2} = |z| |\alpha|.$$

Cette norme respecte également l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta| &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{|\alpha_1 + \beta_1|^2 + |\alpha_2 + \beta_2|^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(|\alpha_1| + |\beta_1|)^2 + (|\alpha_2| + |\beta_2|)^2} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{|\alpha_1|^2 + 2|\alpha_1||\beta_1| + |\beta_1|^2 + |\alpha_2|^2 + 2|\alpha_2||\beta_2| + |\beta_2|^2} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum_s |\alpha_s|^2 + 2 \sum_s |\alpha_s||\beta_s| + \sum_s |\beta_s|^2}, \end{aligned}$$

mais puisque $|\alpha_s|$ et $|\beta_s|$ sont des nombres réels positifs et en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_s |\alpha_s||\beta_s| = \sqrt{\left[\sum_s |\alpha_s||\beta_s| \right]^2} \leq \sqrt{\sum_s |\alpha_s|^2} \sqrt{\sum_s |\beta_s|^2},$$

cela nous conduit à

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta| &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum_s |\alpha_s|^2 + 2 \sqrt{\sum_s |\alpha_s|^2} \sqrt{\sum_s |\beta_s|^2} + \sum_s |\beta_s|^2} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\sum_s |\alpha_s|^2} + \sqrt{\sum_s |\beta_s|^2} \right] = |\alpha| + |\beta|. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
 |\alpha\beta| &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{|\alpha_{\hat{1}}\beta_{\hat{1}}|^2 + |\alpha_{\hat{2}}\beta_{\hat{2}}|^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{|\alpha_{\hat{1}}|^2 |\beta_{\hat{1}}|^2 + |\alpha_{\hat{2}}|^2 |\beta_{\hat{2}}|^2} \\
 &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{|\alpha_{\hat{1}}|^2 |\beta_{\hat{1}}|^2 + |\alpha_{\hat{1}}|^2 |\beta_{\hat{2}}|^2 + |\alpha_{\hat{2}}|^2 |\beta_{\hat{1}}|^2 + |\alpha_{\hat{2}}|^2 |\beta_{\hat{2}}|^2} \\
 &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(|\alpha_{\hat{1}}|^2 + |\alpha_{\hat{2}}|^2) (|\beta_{\hat{1}}|^2 + |\beta_{\hat{2}}|^2)} = \sqrt{2} |\alpha| |\beta|.
 \end{aligned}$$

Ce dernier résultat, *i.e.* $|\alpha\beta| \neq |\alpha| |\beta|$, implique que la structure $(\mathbb{T}, +, \cdot, | \cdot |)$ n'est pas une algèbre à valeur absolue. Toutefois, il fait de celle-ci une algèbre de Banach modifiée.

2.2 L'analyse

Nous allons maintenant présenter un modeste et bref aperçu très peu rigoureux du calcul différentiel et intégral bicomplexe. Tout d'abord, on doit introduire le concept de fonction bicomplexe. Afin de construire une généralisation du concept de nombre bicomplexe qui intègre la notion de continuité, on choisit de définir une fonction bicomplexe f d'une variable bicomplexe μ par un développement en série infinie de puissances entières

$$f(\mu) := \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \mu^k, \quad \text{avec } \alpha_k \in \mathbb{T}. \quad (2.19)$$

En écrivant ceci dans la représentation idempotente, on a

$$\begin{aligned}
 f(\mu) &= \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_{k\hat{1}} \mathbf{e}_1 + \alpha_{k\hat{2}} \mathbf{e}_2) (\mu_{\hat{1}} \mathbf{e}_1 + \mu_{\hat{2}} \mathbf{e}_2)^k \\
 &= \mathbf{e}_1 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k\hat{1}} \mu_{\hat{1}}^k + \mathbf{e}_2 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k\hat{2}} \mu_{\hat{2}}^k := \mathbf{e}_1 f_{\hat{1}}(\mu_{\hat{1}}) + \mathbf{e}_2 f_{\hat{2}}(\mu_{\hat{2}}), \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

avec $f_{\hat{1}}$ et $f_{\hat{2}}$ deux fonctions complexes en $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ et où on suppose que le développement en série de ces deux fonctions converge. Si les coefficients α_k sont tous réels, alors $f_{\hat{1}} = f_{\hat{2}}$. En particulier, on définit la fonction bicomplexe la plus simple et la plus importante qui soit, c'est-à-dire l'exponentielle d'une variable bicomplexe μ , comme

$$\exp \mu := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!}. \quad (2.21)$$

De la même façon que pour les nombres complexes, on a également les définitions des fonctions élémentaires suivantes

$$\cos \mu := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\mu^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin \mu := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\mu^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (2.22)$$

$$\cosh \mu := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^{2n}}{(2n)!}, \quad \sinh \mu := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (2.23)$$

On peut montrer, en s'appuyant sur les résultats de l'analyse complexe, que toutes ces séries convergent et satisfont à une panoplie de théorèmes semblables à ceux du cas complexe.

Similairement à (2.19), on peut définir une fonction bicomplexe f de q variables bicomplexes μ_1, \dots, μ_q de la façon suivante

$$f(\mu) := \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_q=0}^{\infty} \alpha_{k_1 \dots k_q} \mu_1^{k_1} \cdots \mu_q^{k_q}.$$

En l'écrivant sur la base idempotente,

$$\begin{aligned} f(\mu) &= \mathbf{e}_1 \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_q=0}^{\infty} \alpha_{(k_1 \dots k_q)\hat{1}} \mu_{1\hat{1}}^{k_1} \cdots \mu_{q\hat{1}}^{k_q} \\ &\quad + \mathbf{e}_2 \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_q=0}^{\infty} \alpha_{(k_1 \dots k_q)\hat{2}} \mu_{1\hat{2}}^{k_1} \cdots \mu_{q\hat{2}}^{k_q} := \mathbf{e}_1 f_{\hat{1}}(\mu_{\hat{1}}) + \mathbf{e}_2 f_{\hat{2}}(\mu_{\hat{2}}). \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où μ_1, \dots, μ_q sont toutes des variables réelles, les projections

idempotentes coïncident avec l'identité et il vient que

$$f(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{e}_1 f_{\hat{1}}(\boldsymbol{\mu}) + \mathbf{e}_2 f_{\hat{2}}(\boldsymbol{\mu}).$$

Une fonction bicomplexe f est dite holomorphe si et seulement si $f_{\hat{1}}$ et $f_{\hat{2}}$ sont toutes deux holomorphes. L'avantage de cette définition est que ce type de fonction hérite de plusieurs, voir de la majorité, des propriétés des fonctions holomorphes complexes.

Soit X un domaine de \mathbb{T} et $f : X^q \rightarrow \mathbb{T}$, $\boldsymbol{\mu} \mapsto f(\boldsymbol{\mu})$, une fonction bicomplexe de q variables bicomplexes μ_i . On définit la dérivée partielle de f par rapport à μ_k en un point quelconque $\boldsymbol{\mu}_0$ dans X^q par

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{\mu}_0)}{\partial \mu_k} := \lim_{\mu_k \rightarrow \mu_{k0}} \frac{f(\boldsymbol{\mu}) - f(\boldsymbol{\mu}_0)}{\mu_k - \mu_{k0}}, \quad \text{avec} \quad \mu_k - \mu_{k0} \notin \mathcal{NC}. \quad (2.24)$$

La fonction f a une dérivée dans X^q si et seulement si elle a une dérivée en chaque point $\boldsymbol{\mu}_0$ de X^q . En écrivant cette définition sur la base idempotente, il vient que

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{\mu}_0)}{\partial \mu_k} = \sum_s \lim_{\mu_{k\hat{s}} \rightarrow \mu_{k0\hat{s}}} \frac{f_{\hat{s}}(\boldsymbol{\mu}_{\hat{s}}) - f_{\hat{s}}(\boldsymbol{\mu}_{0\hat{s}})}{\mu_{k\hat{s}} - \mu_{k0\hat{s}}} \mathbf{e}_s = \sum_s \frac{\partial f_{\hat{s}}(\boldsymbol{\mu}_{0\hat{s}})}{\partial \mu_{k\hat{s}}} \mathbf{e}_s. \quad (2.25)$$

Ce résultat suggère que la dérivée dans $X^q \subseteq \mathbb{T}^q$ est inévitablement reliée à celle dans $Y_1^q \subseteq \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)^q$ et $Y_2^q \subseteq \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)^q$. La définition en tant que séries de puissances entières nous assure que toute fonction bicomplexe est infiniment différentiable et continue. La somme, le produit, le quotient et la composition de fonctions bicomplexes différentiables sont encore des fonctions différentiables. De plus, les formules de dérivation pour ces entités sont des extensions du cas complexe. Avec la dérivée, on peut montrer que toute fonction bicomplexe différentiable possède un développement en série de puissances infinies donnée par une version généralisée du théorème de Taylor.

Supposons que $[a, b]$ soit un intervalle de \mathbb{R} . On dit d'une application $\zeta : [a, b] \rightarrow \mathbb{T}$, $t \mapsto \zeta(t)$, qu'elle est une courbe C dans \mathbb{T} . La trace de C est l'ensemble des points $\zeta(t)$ dans \mathbb{T} . Si C est une courbe dans \mathbb{T} , alors il existe quatre fonctions $x_k : [a, b] \rightarrow$

$\mathbb{R}, t \mapsto x_k(t)$ telles que

$$\zeta(t) = x_1(t) + x_2(t)\mathbf{i}_1 + x_3(t)\mathbf{i}_2 + x_4(t)\mathbf{j}. \quad (2.26)$$

La dérivée d'une telle fonction en $t_0 \in [a, b]$ est bien définie, car

$$\frac{\zeta(t) - \zeta(t_0)}{t - t_0} = \frac{x_1(t) - x_1(t_0)}{t - t_0} + \mathbf{i}_1 \frac{x_2(t) - x_2(t_0)}{t - t_0} + \mathbf{i}_2 \frac{x_3(t) - x_3(t_0)}{t - t_0} + \mathbf{j} \frac{x_4(t) - x_4(t_0)}{t - t_0}$$

ce qui implique, en passant à la limite $t \rightarrow t_0$,

$$\frac{d\zeta(t_0)}{dt} = \frac{dx_1(t_0)}{dt} + \mathbf{i}_1 \frac{dx_2(t_0)}{dt} + \mathbf{i}_2 \frac{dx_3(t_0)}{dt} + \mathbf{j} \frac{dx_4(t_0)}{dt}.$$

Si ζ est holomorphe, alors toutes ses dérivées sont continues. Dans le même ordre d'idées, on peut définir une intégrale de Riemann comme en [56], et obtenir un théorème fondamental du calcul intégral.

2.3 Les modules

Un module est une structure algébrique similaire à un espace vectoriel, sauf qu'au lieu d'être construite sur un corps, elle est basée sur le concept d'anneau. Supposons $|f\rangle, |g\rangle, |h\rangle$ trois éléments quelconques d'un ensemble \mathcal{S} et α, β appartenant à un anneau $(A, +, \cdot)$. Soit une opération binaire interne, notée $*$: $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$, et une opération binaire externe, notée \circ : $A \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$. On dit que la structure algébrique $(\mathcal{S}, A, *, \circ)$ est un A -module si elle satisfait les propriétés du tableau 2.2 [59].

1. Commutativité de $*$	$ f\rangle * g\rangle = g\rangle * f\rangle$
2. Associativité de $*$	$(f\rangle * g\rangle) * h\rangle = f\rangle * (g\rangle * h\rangle)$
3. Neutre de $*$	$(\exists 0\rangle \in \mathcal{S}) (0\rangle * f\rangle = f\rangle)$
4. Distributivité de \circ sur $+$	$(\alpha + \beta) \circ f\rangle = \alpha \circ f\rangle * \beta \circ f\rangle$
5. Nul de \circ	$0 \circ f\rangle = 0\rangle$
6. Neutre de \circ	$1 \circ f\rangle = f\rangle$
7. Distributivité de \circ sur $*$	$\alpha \circ (f\rangle * g\rangle) = \alpha \circ f\rangle * \alpha \circ g\rangle$
8. Associativité de \circ	$(\alpha \cdot \beta) \circ f\rangle = \alpha \circ (\beta \circ f\rangle)$

TABLEAU 2.2 – Propriétés d'un module.

Notons que par définition, une opération binaire sur un même ensemble est toujours fermée. Plus précisément, la définition ci-dessus est celle d'un module à gauche. Si l'opération \circ est commutative, alors le module à gauche et le module à droite sont équivalents. Évidemment, on vérifie aisément que les nombres bicomplexes sont un module construit sur eux-même.

Nous allons maintenant montrer que l'ensemble des fonctions bicomplexes normalisables de q variables réelles \mathcal{F}_q muni de l'opération interne d'addition $+$ et l'opération externe de multiplication par un scalaire \cdot forme un \mathbb{T} -module. Supposons d'abord que $f, g, h \in \mathcal{F}_q$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$. Alors, puisqu'une fonction bicomplexe est fondamentalement une machine à générer des nombres bicomplexes et que conséquemment, elle est toujours un nombre bicomplexe elle-même, les propriétés 1 à 8 sont automatiquement satisfaites pour tout ensemble de fonctions bicomplexes. Il reste seulement à vérifier que l'addition de deux éléments de \mathcal{F}_q est encore un élément de \mathcal{F}_q .

En effet, pour toutes fonctions complexes de carré intégrable $f_{\hat{s}}$ et $g_{\hat{s}}$ et en vertu des propriétés de la norme réelle de l'analyse complexe [60],

$$\left| \int \overline{f_{\hat{s}}(\mu)} g_{\hat{s}}(\mu) d\mu \right| \leq \int \left| \overline{f_{\hat{s}}(\mu)} g_{\hat{s}}(\mu) \right| d\mu = \int \left| \overline{f_{\hat{s}}(\mu)} \right| |g_{\hat{s}}(\mu)| d\mu$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_i \int_{R^i} |f_{\widehat{s}}(\mu)| |g_{\widehat{s}}(\mu)| d\mu + \sum_j \int_{R^j} |f_{\widehat{s}}(\mu)| |g_{\widehat{s}}(\mu)| d\mu \\
&\leq \sum_i \int_{R^i} |f_{\widehat{s}}(\mu)| |f_{\widehat{s}}(\mu)| d\mu + \sum_j \int_{R^j} |g_{\widehat{s}}(\mu)| |g_{\widehat{s}}(\mu)| d\mu \\
&\leq \sum_i \int_{R^i} |f_{\widehat{s}}(\mu)|^2 d\mu + \sum_j \int_{R^j} |g_{\widehat{s}}(\mu)|^2 d\mu < \infty.
\end{aligned}$$

Notons que R^i sont les régions du domaine d'intégration pour lesquelles la fonction $|f_{\widehat{s}}|$ est plus grande ou égale à $|g_{\widehat{s}}|$. De façon complémentaire, les régions R^j correspondent au cas où $|f_{\widehat{s}}|$ est plus petite que $|g_{\widehat{s}}|$. Ainsi, la fonction $f+g$ est de carré intégrable et \mathcal{F}_q est fermé sous l'addition. Finalement, nous avons prouvé que la structure $(\mathcal{F}_q, \mathbb{T}, +, \cdot)$ est un \mathbb{T} -module.

Il est important de préciser que les fonctions qui appartiennent à l'ensemble \mathcal{F}_q proviennent d'une combinaison linéaire sur la base idempotente de deux fonctions complexes quelconques de carré intégrable. Ces fonctions bicomplexes sont plus générales que celles qui sont définies par un développement en série de puissances.

Chapitre 3

Présentation de l'article

*Discovery consists of seeing what everybody has
seen and thinking what nobody has thought.
—Albert von Szent-Gyorgyi [61, p. 15].*

L'article contenu dans ce mémoire a été soumis au journal *Communications in Mathematical Physics* dans un format approprié qui se plie à leurs exigences typographiques. La version ci-dessous est la même, mais présentée dans un format plus standard et disponible sur le site internet d'arXiv [36].

Les calculs préliminaires ainsi que les quatre premières versions de l'article ont été rédigés par J.M. sous la supervision rigoureuse de L.M. et D.R. Des améliorations de toute sorte ont été apportées par les trois auteurs, particulièrement L.M. et D.R. Par la suite, les trois dernières versions ont été consciencieusement peaufinées et reformulées par L.M. en tenant compte de diverses améliorations proposées par D.R. et J.M.

The bicomplex quantum Coulomb potential problem

Jérémie Mathieu,¹ Louis Marchildon¹ and Dominic Rochon²

¹*Département de physique, Université du Québec,
Trois-Rivières, Qc, Canada, G9A 5H7*

jeremie.mathieu@ugtr.ca, louis.marchildon@ugtr.ca

²Département de mathématiques et d'informatique,
Université du Québec, Trois-Rivières, Qc, Canada, G9A 5H7
dominic.rochon@uqtr.ca

Abstract

Generalizations of the complex number system underlying the mathematical formulation of quantum mechanics have been known for some time, but the use of the commutative ring of bicomplex numbers for that purpose is relatively new. This paper provides an analytical solution of the quantum Coulomb potential problem formulated in terms of bicomplex numbers. We define the problem by introducing a bicomplex hamiltonian operator and extending the canonical commutation relations to a form like $[X_i, P_k] = \mathbf{i}_1 \hbar \xi \delta_{ik} I$, where ξ is a bicomplex number. Following Pauli's algebraic method, we find the eigenvalues of the bicomplex hamiltonian. These eigenvalues are also obtained, along with appropriate eigenfunctions, by solving the extension of Schrödinger's time-independent differential equation. Examples of solutions are displayed. There is an orthonormal system of solutions that belongs to a bicomplex Hilbert space.

1 Introduction

It is generally believed that the best justification of a physical theory, no matter what the nature of its mathematical formalism, rests on the agreement of its predictions with experiments and the internal consistency or elegance of the theory itself [1]. Views on the mathematical formalism range from pure instrumentalism to the idea that the formalism itself is real [2].

The mathematical formalism of quantum mechanics has been studied thoroughly [3, 4, 5]. Not everyone agrees on the set of postulates necessary to build the foundations of a coherent quantum mechanics [6, 7]. The Hilbert space structure of the set of quantum states, however, seems to be uncontroversial.

Hilbert spaces used in quantum mechanics are defined over the nonordered field of complex numbers \mathbb{C} . Complex numbers make up a division algebra richer than their real subset, and are deeply connected with superposition of quantum-mechanical amplitudes. Unitary representations of Lie groups, fundamental tools in the quantum theory of symmetry, require complex numbers in an essential way [8, 9].

Quantum mechanics postulates that the only possible results of the measurement of a dynamical variable are the eigenvalues of the corresponding self-adjoint operator acting in the state space. As eigenvalues of self-adjoint operators are real, this is a form of correspondence between the quantum and classical world descriptions.

If complex numbers are so appropriate to describe the quantum world, one can ask whether generalizations of that number system might do equally well or even better. The noncommutative field of quaternions has already been investigated from that point of view [10]. More recently, attention has turned towards the commutative ring of bicomplex numbers [11, 12]. This paper is part of a program of extending the quantum mathematical formalism to that algebraic structure, which is neither a division algebra nor an absolute-valued algebra over the real numbers [13, 14, 15, 16, 17, 18].

In sect. 2, we review some of the algebraic properties of bicomplex numbers and construct an infinite-dimensional bicomplex Hilbert space made up of square-integrable bicomplex functions. Section 3 defines the bicomplex generalization of the quantum-mechanical Coulomb potential problem. Eigenvalues of the corresponding hamiltonian are obtained through Pauli's algebraic method. Section 4 is devoted to obtaining eigenfunctions of the bicomplex Coulomb potential hamiltonian in the coordinates basis. To our knowledge, this is the first time that this has been done with an algebra larger than \mathbb{C} . Graphical representations of some functions of interest are shown in sect. 5. In sect. 6 we check the consistency of some of the assumptions made and show that the Coulomb eigenfunctions live in a bicomplex Hilbert space. We conclude in sect. 7.

2 Bicomplex numbers and functions

In this section we briefly summarize relevant algebraic properties of bicomplex numbers. More information and proofs can be found in [11, 12]. We define the concept of a square-integrable bicomplex function. Such functions are then used to construct an infinite-dimensional bicomplex Hilbert space which, it turns out, will be an appropriate arena for bicomplex Coulomb potential eigenfunctions.

2.1 Algebraic structure

One way to define a bicomplex number α is by writing

$$\alpha := \alpha_{\hat{1}}\mathbf{e}_1 + \alpha_{\hat{2}}\mathbf{e}_2, \quad (1)$$

where $\alpha_{\hat{1}}$ and $\alpha_{\hat{2}}$ belong to $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$, the field of complex numbers. The caret notation [15] is used to label complex components of bicomplex numbers, thereby avoiding confusion with other kinds of indices. The imaginary bicomplex units \mathbf{e}_1 and \mathbf{e}_2 satisfy the remarkable properties

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = 1 \quad \text{and} \quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = 0 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1. \quad (2)$$

We call $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ the idempotent basis of bicomplex numbers. With the addition and multiplication defined in the obvious way, the set of bicomplex numbers \mathbb{T} forms a commutative ring with unity. Properties (2) greatly simplify bicomplex algebraic calculations and make definition (1), among other equivalent choices, a very useful one for our purposes.

If $\alpha_{\hat{1}} = 0$, then (2) implies that $\alpha\mathbf{e}_1 = 0$. In fact any bicomplex number α for which either $\alpha_{\hat{1}} = 0$ or $\alpha_{\hat{2}} = 0$ is a zero divisor. The set of all zero divisors is called the null cone and is denoted by \mathcal{NC} .

Define \mathbf{j} , the imaginary hyperbolic unit, as $\mathbf{j} := \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$. Then $\mathbf{j}^2 = 1$, $\mathbf{e}_1 = (1 + \mathbf{j})/2$ and $\mathbf{e}_2 = (1 - \mathbf{j})/2$. Substituting this in (1), we get the hyperbolic representation of α as

$$\alpha = \left\{ \frac{\alpha_{\hat{1}} + \alpha_{\hat{2}}}{2} \right\} + \left\{ \frac{\alpha_{\hat{1}} - \alpha_{\hat{2}}}{2} \right\} \mathbf{j} =: x_{\alpha} + y_{\alpha} \mathbf{j}, \quad (3)$$

which in turn means that $\alpha_{\hat{1}} = x_{\alpha} + y_{\alpha}$ and $\alpha_{\hat{2}} = x_{\alpha} - y_{\alpha}$. If $\alpha_{\hat{1}}$ and $\alpha_{\hat{2}}$ are both in \mathbb{R} , we call α a hyperbolic number. The set \mathbb{D} of all hyperbolic

numbers is obviously a subset of \mathbb{T} .¹

There are several ways to define conjugation in \mathbb{T} , but the one most useful for our purposes is the following. We define α^\dagger as $\overline{\alpha_1} \mathbf{e}_1 + \overline{\alpha_2} \mathbf{e}_2$, where the upper bar denotes the usual complex conjugation. Clearly,

$$\alpha^\dagger \alpha = |\alpha_1|^2 \mathbf{e}_1 + |\alpha_2|^2 \mathbf{e}_2, \quad (4)$$

where $|\cdot|$ is the standard real norm of complex algebra.

The real norm of a bicomplex number α is defined as

$$|\alpha| := \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2}. \quad (5)$$

If α is hyperbolic, then

$$|\alpha| = \sqrt{x_\alpha^2 + y_\alpha^2} := \sqrt{\operatorname{Re}(\alpha)^2 + \operatorname{Hy}(\alpha)^2}.$$

One can show [11] that for all $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$ and $z \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$,

$$|\alpha| \geq 0, \quad |z\alpha| = |z| |\alpha|, \quad |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \quad \text{and} \quad |\alpha\beta| \leq \sqrt{2} |\alpha| |\beta|.$$

Since \mathbb{T} possesses zero divisors and since the norm of a product of bicomplex numbers is not in general equal to the product of their norms, the algebraic structure $(\mathbb{T}, +, \cdot, |\cdot|)$ is neither a division algebra nor an absolute-valued algebra over the real numbers.

2.2 Normed function space

Defining a bicomplex function f of q bicomplex variables as a q -tuple infinite positive-integer power series with bicomplex coefficients, one can show that

$$f(\boldsymbol{\mu}) = f_1(\boldsymbol{\mu}_1) \mathbf{e}_1 + f_2(\boldsymbol{\mu}_2) \mathbf{e}_2. \quad (6)$$

The notation $f(\boldsymbol{\mu})$ means that f depends on q bicomplex variables μ_i , and each f_s ($s = 1, 2$) is a $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ complex functions of the q complex variables $\mu_{i\hat{s}}$.

We say that f in (6) belongs to the null cone if either f_1 or f_2 is zero. We call f a hyperbolic function if f_1 and f_2 are both real.

¹Note that $(-\mathbf{i}_1 \mathbf{j})^2 = -1$, so that $-\mathbf{i}_1 \mathbf{j}$ has the properties of an imaginary unit. It is usually called \mathbf{i}_2 .

As a particular case, if all μ_i are real we simply have

$$f(\boldsymbol{\mu}) = f_1(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{e}_1 + f_2(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{e}_2. \quad (7)$$

We say that f is a bicomplex square-integrable function if and only if the $f_{\hat{s}}$ are both square-integrable functions, that is,

$$\int |f_{\hat{s}}(\boldsymbol{\mu})|^2 d\boldsymbol{\mu} < \infty \quad (8)$$

for $s = 1$ and 2 . Here $d\boldsymbol{\mu}$ is the Lebesgue measure on \mathbb{R}^q [19]. We denote by \mathcal{F}_q the set of bicomplex square-integrable functions of q real variables. It can be shown that with standard addition and multiplication, \mathcal{F}_q makes up a \mathbb{T} -module. This module is explicitly denoted as $(\mathcal{F}_q, \mathbb{T}, +, \cdot)$ and it obviously has infinite dimension.

For any $f, g \in \mathcal{F}_q$, the following binary mapping takes two bicomplex square-integrable functions and transforms them into a unique bicomplex number:

$$(f, g) := \int f^\dagger(\boldsymbol{\mu}) g(\boldsymbol{\mu}) d\boldsymbol{\mu} = \sum_s \mathbf{e}_s \int \overline{f_{\hat{s}}(\boldsymbol{\mu})} g_{\hat{s}}(\boldsymbol{\mu}) d\boldsymbol{\mu}. \quad (9)$$

If we identify functions that differ only on a set of measure zero, the binary mapping (9) satisfies all the properties of a scalar product. Explicitly,

1. $(f, g + h) = (f, g) + (f, h)$;
2. $(f, \alpha g) = \alpha(f, g)$;
3. $(f, g) = (g, f)^\dagger$;
4. $(f, f) = 0$ if and only if $f = 0$.

The functions f and g are orthogonal if their scalar product vanish. We say that f is normalized if $(f, f) = 1$.

With (9), one can define an induced \mathbb{T} -norm on \mathcal{F}_q as

$$\|f\| := \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(f, f)_{\hat{1}} + (f, f)_{\hat{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum_s \int |f_{\hat{s}}(\boldsymbol{\mu})|^2 d\boldsymbol{\mu}}. \quad (10)$$

Making use of results proved in [17], it is not difficult to show that the structure $(\mathcal{F}_q, \mathbb{T}, +, \cdot, (\ , \), \| \ \|)$ is a bicomplex Hilbert space.

3 The Coulomb potential problem

In standard quantum mechanics, the hamiltonian associated with the Coulomb potential is given by

$$H = \frac{1}{2\mu} P^2 - \frac{Ze^2}{R}, \quad (11)$$

where μ , e^2 and Z are positive real numbers and

$$P^2 := P_1^2 + P_2^2 + P_3^2, \quad R := \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}. \quad (12)$$

The six operators X_i and P_k are self-adjoint and satisfy the commutation relation $[X_i, P_k] = \mathbf{i}_1 \hbar \delta_{ik} I$.

The quantum-mechanical Coulomb problem consists in finding the eigenvalues and eigenvectors of H , that is, it consists in solving the equation $H|\psi_E\rangle = E|\psi_E\rangle$. Its most important application is the determination of the energy levels and state vectors of a hydrogen atom or hydrogen-like ion in its center-of-mass frame. The Coulomb problem is one of the few analytically solvable problems of quantum mechanics. The solution can be obtained both by an algebraic method that goes back to Pauli [20, 21, 22], and by a differential equation method that goes back to Schrödinger [23, 24, 25].

3.1 Statement of the bicomplex problem

The quantum Coulomb problem will now be formulated in terms of bicomplex numbers. The crucial step consists in extending the canonical commutation relations the way it was done for the harmonic oscillator [15]. We proceed by making a set of assumptions, from which we will derive a number of properties satisfied by eigenvalues and eigenkets of the hamiltonian. The consistency of the assumptions will eventually be checked through the explicit solutions obtained. So here are our assumptions:

- a) Seven bicomplex linear operators X_i , P_k and H , related by (11) and (12), act in a \mathbb{T} -module \mathcal{M} . Elements of \mathcal{M} are called kets and are generically denoted as $|\psi\rangle$. Operators and kets can be decomposed in the idempotent basis as

$$X_i = X_{i1}\mathbf{e}_1 + X_{i2}\mathbf{e}_2, \quad (13)$$

$$|\psi\rangle = |\psi\rangle_1\mathbf{e}_1 + |\psi\rangle_2\mathbf{e}_2. \quad (14)$$

Here $X_{i\mathbf{s}} := \mathbf{e}_{\mathbf{s}} X_i$ and $|\psi\rangle_{\mathbf{s}} := \mathbf{e}_{\mathbf{s}} |\psi\rangle$. We say that X_i belongs to the null cone if either X_{i1} or $X_{i2} = 0$. The same applies to P_k and H . Similarly, $|\psi\rangle \in \mathcal{NC}$ if $|\psi\rangle_1$ or $|\psi\rangle_2 = |0\rangle$. The bold index notation is such that any quantity affected by a bold subscript \mathbf{s} is unchanged when multiplied by $\mathbf{e}_{\mathbf{s}}$.

- b) The operators X_i and P_k are self-adjoint with respect to a bicomplex scalar product to be specified explicitly. The scalar product has to satisfy properties analogous to the ones enumerated after eq. (9). Self-adjointness is denoted as $X_i = X_i^*$ and $P_k = P_k^*$.
- c) The scalar product of a ket with itself belongs to $\mathbb{D}_+ := \{\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 : \alpha_1, \alpha_2 \geq 0\}$.
- d) $[X_i, P_k] = \mathbf{i}_1 \hbar \delta_{ik} \xi I$, where $\xi \in \mathbb{T}$ is not in the null cone, I is the identity operator on \mathcal{M} , \hbar is Planck's reduced constant and δ_{ik} is Kronecker's delta.
- e) There are eigenkets $|\psi_E\rangle$ of H which are not in the null cone and whose corresponding eigenvalues E are not in the null cone.
- f) Eigenkets $|\psi_E\rangle$ corresponding to a given eigenvalue E span a finite-dimensional \mathbb{T} -module.
- g) Two eigenkets $|\psi_{E_i}\rangle, |\psi_{E_j}\rangle$ of H , not in \mathcal{NC} , with $(E_i - E_j)$ not in \mathcal{NC} , are orthogonal.

Assumption (a) introduces the bicomplex generalization of the position, momentum and energy operators. With (b) we impose, as in the standard case, the self-adjointness of X_i and P_k . The third general property of the scalar product, stated after eq. (9), implies that $(|\psi\rangle, |\psi\rangle) \in \mathbb{D}$. The more restrictive assumption (c) is added so that a ket $|\psi\rangle \notin \mathcal{NC}$ can always be normalized [16], through multiplication by $(|\psi\rangle, |\psi\rangle)^{-1/2}$.

The second and third general properties of the scalar product imply that $(\alpha|\psi\rangle, |\phi\rangle) = \alpha^\dagger (|\psi\rangle, |\phi\rangle)$. This means that the eigenvalues of a self-adjoint bicomplex operator (associated with an eigenket that is not in the null cone) are hyperbolic numbers [14].

The simplest possible form of a bicomplex extension of the canonical commutation relations seems to be imbedded in (d). This assumption entails that none of the operators X_i and P_k belongs to the null cone. Assumption (e)

implies that H is not in \mathcal{NC} . Indeed if H_1 vanished, for instance, H could not have an eigenvalue with $E_{\hat{1}} \neq 0$. Making use of the self-adjointness of X_i and P_k and the properties of the scalar product, one can show that the bicomplex number ξ introduced in (d) is in fact a hyperbolic number [15].

Assumption (f) is not really necessary. In effect it restricts the eigenvalues we will obtain to the discrete spectrum. Assumption (g) can be seen as contributing to the specification of the scalar product. That assumption is not necessary to derive eigenvalues through the algebraic method, but it is needed to give structure to the \mathbb{T} -module of eigenkets. In the differential equation method that will be used in sect. 4, (g) will in fact be derived.

We will now show that, without loss of generality, ξ can be taken in \mathbb{D}^+ .² To do this, we show that a simple rescaling of X_i and P_k transforms the problem specified in assumptions (a) to (g) into an equivalent one, but with ξ in \mathbb{D}^+ .

For $s = 1, 2$, let $\alpha_{\hat{s}}$ and $\beta_{\hat{s}}$ be in $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ and nonzero. Define X'_i and P'_k so that

$$X_i := (\alpha_{\hat{1}}\mathbf{e}_1 + \alpha_{\hat{2}}\mathbf{e}_2) X'_i \quad \text{and} \quad P_k := (\beta_{\hat{1}}\mathbf{e}_1 + \beta_{\hat{2}}\mathbf{e}_2) P'_k. \quad (15)$$

We have

$$\begin{aligned} (|\phi\rangle, X_i|\psi\rangle) &= \{\alpha_{\hat{1}}\mathbf{e}_1 + \alpha_{\hat{2}}\mathbf{e}_2\} (|\phi\rangle, X'_i|\psi\rangle), \\ (X_i|\phi\rangle, |\psi\rangle) &= \{\overline{\alpha_{\hat{1}}}\mathbf{e}_1 + \overline{\alpha_{\hat{2}}}\mathbf{e}_2\} (X'_i|\phi\rangle, |\psi\rangle). \end{aligned}$$

Since X_i is self-adjoint, the left-hand sides of these two expressions are equal. The right-hand sides must also be equal. Using that and requiring X'_i to be self-adjoint, we find

$$\{\alpha_{\hat{1}}\mathbf{e}_1 + \alpha_{\hat{2}}\mathbf{e}_2\} (|\phi\rangle, X'_i|\psi\rangle) = \{\overline{\alpha_{\hat{1}}}\mathbf{e}_1 + \overline{\alpha_{\hat{2}}}\mathbf{e}_2\} (|\phi\rangle, X'_i|\psi\rangle).$$

Since X'_i is not in \mathcal{NC} , one can always find kets $|\phi\rangle$ and $|\psi\rangle$ such that $(|\phi\rangle, X'_i|\psi\rangle)$ is not in \mathcal{NC} . Therefore $\alpha_{\hat{s}} = \overline{\alpha_{\hat{s}}}$. By a similar argument, $\beta_{\hat{s}} = \overline{\beta_{\hat{s}}}$.

Let us now substitute (15) into (11). In the idempotent basis we have

$$H = \sum_s \left\{ \frac{1}{2\mu} \sum_k \beta_{\hat{s}}^2 P_{k\hat{s}}'^2 - Ze^2 \left[\sum_i \alpha_{\hat{s}}^2 X_{i\hat{s}}'^2 \right]^{-1/2} \right\} \mathbf{e}_s. \quad (16)$$

² \mathbb{D}^+ differs from \mathbb{D}_+ introduced in assumption (c) in that in \mathbb{D}^+ , vanishing values of $\alpha_{\hat{1}}$ and $\alpha_{\hat{2}}$ are excluded.

Sums over indices like i, j and k run from 1 to 3, whereas the idempotent-basis index s runs from 1 to 2. We want H to have a form similar to (11) or, again in the idempotent basis,

$$H = \sum_s \left\{ \frac{1}{2\mu'} \sum_k P'_{k\hat{s}}{}^2 - (Ze^2)' \left[\sum_i X'_{i\hat{s}}{}^2 \right]^{-1/2} \right\} \mathbf{e}_s. \quad (17)$$

Comparing (16) and (17), we see that $\mu' = \mu/\beta_{\hat{s}}^2$. This holds for both $s = 1$ and 2. Hence $\beta_1^2 = \beta_2^2$ or, equivalently, $\beta_{\hat{1}} = \pm\beta_{\hat{2}}$. Comparing again (16) and (17), we have

$$(Ze^2)' \left[\sum_i X'_{i\hat{s}}{}^2 \right]^{-1/2} = Ze^2 \left[\sum_i \alpha_{\hat{s}}^2 X'_{i\hat{s}}{}^2 \right]^{-1/2}.$$

Once more, the only way $(Ze^2)'$ can be a real positive number is if $\alpha_1^2 = \alpha_2^2$, or $\alpha_{\hat{1}} = \pm\alpha_{\hat{2}}$.

Now assumption (d) and definition (15) allow us to write

$$[X_i, P_k] = \mathbf{i}_1 \hbar \delta_{ik} (\xi_{\hat{1}} \mathbf{e}_1 + \xi_{\hat{2}} \mathbf{e}_2) I = (\alpha_{\hat{1}} \beta_{\hat{1}} \mathbf{e}_1 + \alpha_{\hat{2}} \beta_{\hat{2}} \mathbf{e}_2) [X'_i, P'_k].$$

This implies that

$$[X'_i, P'_k] = \mathbf{i}_1 \hbar \delta_{ik} \left(\frac{\xi_{\hat{1}}}{\alpha_{\hat{1}} \beta_{\hat{1}}} \mathbf{e}_1 + \frac{\xi_{\hat{2}}}{\alpha_{\hat{2}} \beta_{\hat{2}}} \mathbf{e}_2 \right) I =: \mathbf{i}_1 \hbar \delta_{ik} (\xi'_1 \mathbf{e}_1 + \xi'_2 \mathbf{e}_2) I.$$

Therefore, we can always choose $\alpha_{\hat{s}}$ and $\beta_{\hat{s}}$ so that ξ'_1 and ξ'_2 are real and positive. Moreover, we can rescale ξ'_1 to be 1, but we cannot in general rescale ξ'_2 so that $\xi'_2 = \xi'_1$. We conclude that H can always be written as in (11), with the commutation relations between X_i and P_k given by

$$[X_i, P_k] = \mathbf{i}_1 \hbar \delta_{ik} (\xi_{\hat{1}} \mathbf{e}_1 + \xi_{\hat{2}} \mathbf{e}_2) I, \quad \xi_{\hat{1}}, \xi_{\hat{2}} \in \mathbb{R}^+. \quad (18)$$

3.2 Eigenvalues of H

In this section, eigenvalues of H are obtained through Pauli's algebraic method. This shows the unicity of the eigenvalues obtained, under assumptions (a)–(g).

Just as in standard quantum mechanics, we define the bicomplex angular momentum operator $\mathbf{L} := \mathbf{R} \times \mathbf{P}$. In terms of the Levi-Civita symbol we have

$$L_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} X_j P_k = \sum_s \left\{ \sum_{jk} \epsilon_{ijk} X_{js} P_{ks} \right\} \mathbf{e}_s. \quad (19)$$

The bicomplex Runge-Lenz vector is defined as

$$\mathbf{A} := \frac{1}{2\mu} (\mathbf{P} \times \mathbf{L} - \mathbf{L} \times \mathbf{P}) - Ze^2 \frac{\mathbf{R}}{R},$$

which is equivalent to

$$A_i = \sum_s \left\{ \frac{1}{\mu} \left(\sum_{jk} \epsilon_{ijk} P_{js} L_{ks} - \mathbf{i}_1 \hbar \xi_s P_{is} \right) - Ze^2 \frac{X_{is}}{R_s} \right\} \mathbf{e}_s. \quad (20)$$

Let us write $\eta := \hbar \xi$. We then observe that the commutator of X_{is} and P_{js} , as well as the definitions of L_{is} and A_{js} , are the same as the ones in the standard quantum-mechanical case, except that \hbar is everywhere replaced by η_s . By an argument identical as in the standard case [21, 22], we therefore obtain the following commutation relations and properties:

$$[A_{is}, H_s] = 0, \quad (21)$$

$$[L_{is}, A_{js}] = \mathbf{i}_1 \eta_s \sum_k \epsilon_{ijk} A_{ks}, \quad (22)$$

$$[A_{is}, A_{js}] = -\frac{2\mathbf{i}_1 \eta_s}{\mu} H_s \sum_k \epsilon_{ijk} L_{ks}, \quad (23)$$

$$\sum_i L_{is} A_{is} = 0 = \sum_i A_{is} L_{is}, \quad (24)$$

$$A_s^2 = (Ze^2)^2 + \frac{2}{\mu} H_s \{L_s^2 + \eta_s^2\}. \quad (25)$$

Here $L_s^2 = \sum_i L_{is}^2$ and $A_s^2 = \sum_i A_{is}^2$. By properties of the idempotent basis, operators H , L_i , and A_j satisfy similar relations as (21)–(25), with the index s deleted. Note that, because of (23), operators H_s , L_{is} , and A_{js} do not make up a Lie algebra. They do, however, generate an infinite-dimensional one.

To avoid having to work with (the bicomplex generalization of) an infinite-dimensional algebra, we will restrict the action of H , L_i , and A_j on the module \mathcal{F}_E corresponding to a given eigenvalue E of H . By assumption (f), \mathcal{F}_E is finite-dimensional. Assuming as in (e) that E is not in \mathcal{NC} , we define three operators \tilde{A}_i acting on \mathcal{F}_E as

$$\tilde{A}_i := \sqrt{\frac{-\mu}{2E}} A_i. \quad (26)$$

Equations (21)–(23) (without the index s) imply quite straightforwardly that

$$[\tilde{A}_i, H] = 0, \quad (27)$$

$$[L_i, \tilde{A}_j] = \mathbf{i}_1 \eta \sum_k \epsilon_{ijk} \tilde{A}_k, \quad (28)$$

$$[\tilde{A}_i, \tilde{A}_j] = \mathbf{i}_1 \eta \sum_k \epsilon_{ijk} L_k. \quad (29)$$

Making use of (24) and (25), we easily obtain

$$\sum_i L_i \tilde{A}_i = 0 = \sum_i \tilde{A}_i L_i \quad (30)$$

and

$$\sum_i \tilde{A}_i \tilde{A}_i + \sum_j L_j L_j + \eta^2 + \frac{\mu}{2E} (Ze^2)^2 = 0. \quad (31)$$

To arrive at explicit values of E , it is useful to construct six operators F_i and G_i as

$$F_i := \frac{1}{2} (L_i - \tilde{A}_i) \quad \text{and} \quad G_i := \frac{1}{2} (L_i + \tilde{A}_i). \quad (32)$$

Since L_i and \tilde{A}_i commute with H , so do F_i and G_i . The commutation relations of the latter are given by

$$[F_i, F_j] = \mathbf{i}_1 \eta \sum_k \epsilon_{ijk} F_k, \quad (33)$$

$$[G_i, G_j] = \mathbf{i}_1 \eta \sum_k \epsilon_{ijk} G_k, \quad (34)$$

$$[F_i, G_j] = 0. \quad (35)$$

This means that the F_i commute with the G_j , but the F_i (and the G_i) have with themselves the same commutation relation as the bicomplex angular momentum operators. Since F_i and G_j commute, F^2 commutes with G^2 . With (30) and (32), one can show that $F^2 - G^2 = 0$ and, therefore, that their eigenvalues are equal.

If we project (33) on the idempotent basis, we find that for each \mathbf{s} the $F_{i\mathbf{s}}$ have the commutation relations of standard angular momentum (with \hbar replaced by $\eta_{\hat{\mathbf{s}}}$). The eigenvalue of $F_{\mathbf{s}}^2$ is therefore equal to $f_{\hat{\mathbf{s}}}(f_{\hat{\mathbf{s}}} + 1)\eta_{\hat{\mathbf{s}}}^2$, where $f_{\hat{\mathbf{s}}}$ is a nonnegative integer or half integer [26]. The eigenvalues of F^2 (and of G^2) are therefore equal to

$$\sum_{\mathbf{s}} f_{\hat{\mathbf{s}}}(f_{\hat{\mathbf{s}}} + 1)\eta_{\hat{\mathbf{s}}}^2 \mathbf{e}_{\mathbf{s}} = f(f + 1)\eta^2, \quad (36)$$

where of course $f = f_1\mathbf{e}_1 + f_2\mathbf{e}_2$.

If we substitute (32) in (31) we get

$$0 = 2 \sum_i F_i F_i + 2 \sum_j G_j G_j + \eta^2 + \frac{\mu}{2E} (Ze^2)^2.$$

For the eigenvalues this entails that

$$0 = (2f + 1)^2 \eta^2 + \frac{\mu}{2E} (Ze^2)^2$$

or, in the idempotent basis,

$$0 = \sum_{\mathbf{s}} \left\{ (2f_{\hat{\mathbf{s}}} + 1)^2 \eta_{\hat{\mathbf{s}}}^2 + \frac{\mu}{2E_{\hat{\mathbf{s}}}} (Ze^2)^2 \right\} \mathbf{e}_{\mathbf{s}}.$$

But then

$$(2f_{\hat{\mathbf{s}}} + 1)^2 \eta_{\hat{\mathbf{s}}}^2 + \frac{\mu}{2E_{\hat{\mathbf{s}}}} (Ze^2)^2 = 0$$

for both $s = 1$ and 2 . This yields for $E_{\hat{\mathbf{s}}}$

$$E_{\hat{\mathbf{s}}} = -\frac{\mu (Ze^2)^2}{2\eta_{\hat{\mathbf{s}}}^2 (2f_{\hat{\mathbf{s}}} + 1)^2} = -\frac{\mu (Ze^2)^2}{2\hbar^2 \xi_{\hat{\mathbf{s}}}^2 (2f_{\hat{\mathbf{s}}} + 1)^2} =: -\frac{\mu Z^2 e^4}{2\hbar^2 \xi_{\hat{\mathbf{s}}}^2 n_{\hat{\mathbf{s}}}^2},$$

where $n_{\hat{\mathbf{s}}}$ is a positive integer. This means that we can write

$$E_n = -\frac{\mu Z^2 e^4}{2\hbar^2 \xi^2 n^2} = \sum_{\mathbf{s}} \left\{ -\frac{\mu Z^2 e^4}{2\hbar^2 \xi_{\hat{\mathbf{s}}}^2 n_{\hat{\mathbf{s}}}^2} \right\} \mathbf{e}_{\mathbf{s}}. \quad (37)$$

This coincides with the standard Coulomb potential energy levels [24, 25] if and only if $\xi_{\hat{1}} = 1 = \xi_{\hat{2}}$ and $n_{\hat{1}} = n_{\hat{2}} = n$. We call $n = n_{\hat{1}}\mathbf{e}_1 + n_{\hat{2}}\mathbf{e}_2$ the bicomplex principal quantum number. In the hyperbolic representation,

$$E_n = -\frac{\mu Z^2 e^4}{4\hbar^2} \left\{ \left[\xi_{\hat{1}}^{-2} n_{\hat{1}}^{-2} + \xi_{\hat{2}}^{-2} n_{\hat{2}}^{-2} \right] + \left[\xi_{\hat{1}}^{-2} n_{\hat{1}}^{-2} - \xi_{\hat{2}}^{-2} n_{\hat{2}}^{-2} \right] \mathbf{j} \right\}. \quad (38)$$

We point out a formal symmetry satisfied by (38). Since $\mathbf{j} := \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, we can see that $\sqrt{\mathbf{j}} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{i}_1 \mathbf{e}_2$. But then $\xi \sqrt{\mathbf{j}} = \xi_{\hat{1}} \mathbf{e}_1 + \mathbf{i}_1 \xi_{\hat{2}} \mathbf{e}_2$. This immediately implies that

$$\operatorname{Re}(E_n, \xi) = \operatorname{Hy}(E_n, \xi \sqrt{\mathbf{j}}) \quad \text{and} \quad \operatorname{Re}(E_n, \xi \sqrt{\mathbf{j}}) = \operatorname{Hy}(E_n, \xi).$$

Note, however, that $\xi \sqrt{\mathbf{j}}$ is not a hyperbolic number.

4 Eigenfunctions of H

In this section, we define a coordinate-basis representation for the bicomplex operators X_i and P_k . We then show that they, as well as H , are self-adjoint with respect to the scalar product defined in sect. 2.2. Finally, solving the hamiltonian eigenvalue equation in the coordinate basis, we recover eigenvalues given in (37) and obtain the hyperbolic Coulomb potential eigenfunctions.

4.1 Coordinate-basis representation

We begin by constructing a representation of X_i and P_k on \mathcal{F}_3 , the space of bicomplex square-integrable functions on \mathbb{R}^3 . Letting \mathbf{r} denote the triplet (x_1, x_2, x_3) , we define the action of X_i as

$$X_i f(\mathbf{r}) := x_i f(\mathbf{r}). \quad (39)$$

This implies that the X_i commute two by two. A function $F(\mathbf{R})$ acts on f as

$$F(\mathbf{R}) f(\mathbf{r}) := F(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}). \quad (40)$$

For the action of P_k we write, in a rather straightforward extension of the standard case

$$P_k f(\mathbf{r}) := -\mathbf{i}_1 \hbar \xi \frac{\partial}{\partial x_k} f(\mathbf{r}) = -\mathbf{i}_1 \eta \frac{\partial}{\partial x_k} f(\mathbf{r}), \quad (41)$$

where $\xi = \xi_1 \mathbf{e}_1 + \xi_2 \mathbf{e}_2$ and the ξ_s are positive real numbers.³ Clearly the P_k commute two by two. Moreover, by letting both sides act on an arbitrary function f , one easily shows that

$$[X_i, P_k] = \mathbf{i}_1 \eta \delta_{ik} I. \quad (42)$$

Let f and g be in \mathcal{F}_3 . Clearly $(X_i f, g) = (f, X_i g)$, so that X_i is self-adjoint. For P_k we have

$$\begin{aligned} (P_k f, g) - (f, P_k g) &= \mathbf{i}_1 \eta^\dagger \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}, g \right) + \mathbf{i}_1 \eta \left(f, \frac{\partial g}{\partial x_k} \right) \\ &= \mathbf{i}_1 \eta \int \left[\frac{\partial f}{\partial x_k} \right]^\dagger g(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} + \mathbf{i}_1 \eta \int f^\dagger(\mathbf{r}) \frac{\partial g}{\partial x_k} d\mathbf{r} \\ &= \mathbf{i}_1 \eta \int \frac{\partial}{\partial x_k} [f^\dagger(\mathbf{r}) g(\mathbf{r})] \, d\mathbf{r} = 0. \end{aligned}$$

To obtain the last equality, we have restricted the space of functions to those that vanish at infinity and on these functions, P_k is self-adjoint. The proof that $(Hf, g) = (f, Hg)$, and therefore that H is self-adjoint, is straightforward.

4.2 Wave functions

The bicomplex quantum Coulomb potential problem consists in solving the three-dimensional eigenvalue equation

$$H\psi_E(\mathbf{r}) = E\psi_E(\mathbf{r}) \quad (43)$$

for H given by (11). Making use of (40) and (41) we can write more explicitly

$$-\left\{ \frac{\eta^2}{2\mu} \nabla^2 + \frac{Ze^2}{r} \right\} \psi_E(\mathbf{r}) = E\psi_E(\mathbf{r}). \quad (44)$$

We now write ξ , E , and ψ_E in the idempotent basis. Equation (44) becomes

$$\sum_s \left\{ \frac{\eta_s^2}{2\mu} \nabla^2 + \frac{Ze^2}{r} + E_s \right\} (\psi_E)_s(\mathbf{r}) \mathbf{e}_s = 0. \quad (45)$$

³Strictly speaking, P_k should be defined on a subset of \mathcal{F}_3 , made up of suitably differentiable functions. We'll come back to this in sect. 6.

Clearly, each coefficient of \mathbf{e}_s must separately vanish. Writing the laplacian in spherical coordinates and making use of the standard expression of the angular momentum operator we get

$$\left\{ \frac{\eta_s^2}{2\mu} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{L_s^2}{\eta_s^2} \right] + \frac{Ze^2}{r} + E_s \right\} (\psi_E)_s = 0, \quad (46)$$

for $s = 1$ and 2 . Now we know from standard quantum mechanics that the spherical harmonics are eigenfunctions of the square of the angular momentum, that is,

$$L_s^2 Y_{l_s m_s} = l_s(l_s + 1) \eta_s^2 Y_{l_s m_s}, \quad (47)$$

with $-l_s \leq m_s \leq l_s$. Looking for solutions of the form

$$(\psi_E)_s(r, \theta, \phi) := u_s(r) Y_{l_s m_s}(\theta, \phi) \quad (48)$$

and using (47), we get for $s = 1, 2$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d}{dr} u_s(r) \right] - \left[\frac{l_s(l_s + 1)}{r^2} - \frac{2\mu}{\eta_s^2} \left(\frac{Ze^2}{r} + E_s \right) \right] u_s(r) = 0. \quad (49)$$

Just as in the standard case, the suitably normalized solutions of (49) are given by [24, 25]

$$u_{n_s l_s}(r) = \left[\left(\frac{2Z}{n_s a_{s0}} \right)^3 \frac{(n_s - l_s - 1)!}{2n_s [(n_s + l_s)!]} \right]^{1/2} e^{-\zeta_s/2} \zeta_s^{l_s} L_{n_s - l_s - 1}^{2l_s + 1}(\zeta_s), \quad (50)$$

where $l_s < n_s$, the $L_{n_s - l_s - 1}^{2l_s + 1}$ are Laguerre polynomials and

$$\zeta_s := \frac{2Z}{n_s a_{s0}} r, \quad a_{s0} := a_0 \xi_s^2 = \frac{\eta_s^2}{\mu e^2}. \quad (51)$$

Each solution corresponds to a value of E_s given by $-\mu Z^2 e^4 / 2\eta_s^2 n_s^2$. Thus we recover the eigenvalues (37). The bicomplex wave functions in (43) can be written as

$$\psi_{nlm}(\mathbf{r}) = u_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi) = \sum_s u_{n_s l_s}(r) Y_{l_s m_s}(\theta, \phi) \mathbf{e}_s. \quad (52)$$

For $\xi_{\hat{1}}$ and $\xi_{\hat{2}}$ fixed, any sextuplet $(n_{\hat{1}}, n_{\hat{2}}, l_{\hat{1}}, l_{\hat{2}}, m_{\hat{1}}, m_{\hat{2}})$ defines an eigenfunction of H . All functions with the same $(n_{\hat{1}}, n_{\hat{2}})$ correspond to the same eigenvalue. A general eigenfunction of H can therefore be written as

$$\sum_s \sum_{l_{\hat{s}}=0}^{n_{\hat{s}}-1} \sum_{m_{\hat{s}}=-l_{\hat{s}}}^{l_{\hat{s}}} C_{l_{\hat{s}}m_{\hat{s}}} u_{n_{\hat{s}}l_{\hat{s}}}(r) Y_{l_{\hat{s}}m_{\hat{s}}}(\theta, \phi) \mathbf{e}_s \quad \text{with} \quad C_{l_{\hat{s}}m_{\hat{s}}} \in \mathbb{T}. \quad (53)$$

Along the way, we have introduced the bicomplex orbital quantum number $l = l_{\hat{1}}\mathbf{e}_1 + l_{\hat{2}}\mathbf{e}_2$ and the bicomplex magnetic quantum number $m = m_{\hat{1}}\mathbf{e}_1 + m_{\hat{2}}\mathbf{e}_2$. When $n_{\hat{1}} = n_{\hat{2}}$, the number n is real, and similarly with l and m .

5 Graphical representation

It is interesting to plot some of the eigenfunctions (52) explicitly. We will concentrate on the radial part. (Note that if $l_{\hat{1}} \neq l_{\hat{2}}$, the spherical harmonics will never factor out as real functions of θ and ϕ .) We write

$$u_{nl}(r) := u_{n_{\hat{1}}l_{\hat{1}}}\mathbf{e}_1 + u_{n_{\hat{2}}l_{\hat{2}}}\mathbf{e}_2. \quad (54)$$

It is particularly instructive to use the decomposition of $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ in terms of \mathbf{j} given in sect. 2.1. We can then rewrite (54) as

$$\begin{aligned} u_{nl}(r) = & \frac{1}{2} \sum_s \sqrt{u_{n_{\hat{s}}l_{\hat{s}}}^0} \xi_{\hat{s}}^{-3} e^{-\xi_{\hat{s}}/2} \zeta_{\hat{s}}^{l_{\hat{s}}} L_{n_{\hat{s}}-l_{\hat{s}}-1}^{2l_{\hat{s}}+1}(\zeta_{\hat{s}}) \\ & + \frac{1}{2} \sum_s (-1)^{s+1} \sqrt{u_{n_{\hat{s}}l_{\hat{s}}}^0} \xi_{\hat{s}}^{-3} e^{-\xi_{\hat{s}}/2} \zeta_{\hat{s}}^{l_{\hat{s}}} L_{n_{\hat{s}}-l_{\hat{s}}-1}^{2l_{\hat{s}}+1}(\zeta_{\hat{s}}) \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (55)$$

where $\sqrt{u_{n_{\hat{s}}l_{\hat{s}}}^0} \xi_{\hat{s}}^{-3}$ is the normalization constant.

It will be useful to define, as in (3),

$$\zeta_{\hat{1}} = x_{\zeta} + y_{\zeta}, \quad \zeta_{\hat{2}} = x_{\zeta} - y_{\zeta}, \quad (56)$$

and consider the three functions $\Re(u_{nl})$, $\Im(u_{nl})$ and $|u_{nl}|$ as depending on r through the two variables x_{ζ} and y_{ζ} . With $\xi_{\hat{s}}$ fixed, graphical representations of these functions can be obtained by assigning specific values to $n_{\hat{s}}$ and $l_{\hat{s}}$.

Figure 1 shows the real part, the hyperbolic part and the real norm of (55) in the specific eigenstate corresponding to $n_{\hat{1}} = 8$, $n_{\hat{2}} = 7$, $l_{\hat{1}} = 6$, $l_{\hat{2}} = 5$.

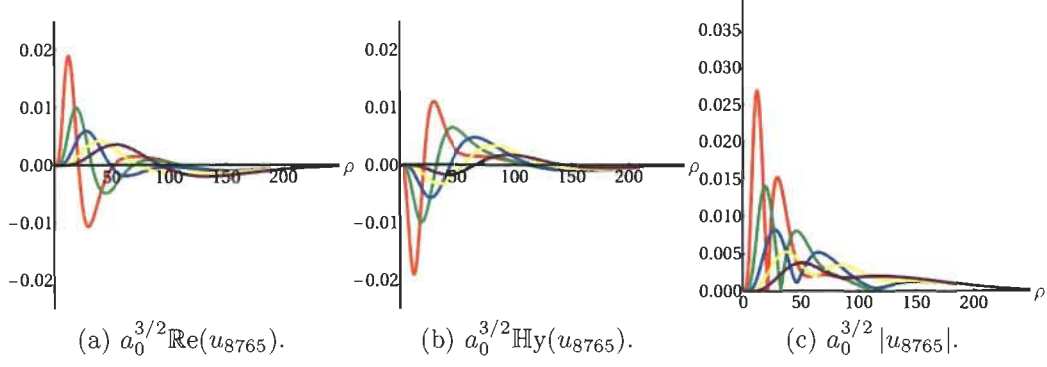


Figure 1: Coulomb potential radial function in a specific eigenstate, for $\xi_2 = 0.50$ (red), 0.62 (green), 0.74 (blue), 0.86 (yellow) and 0.98 (purple).

Here $\xi_1 = 1$ and we have shown the curves obtained for different values of ξ_2 , from 0.50 to 0.98 by intervals of 0.12 . The independent variable ρ is defined as $2Zr/a_0$ and the function plotted is indicated under each graph.

In fig. 2, we go beyond the representation of eigenfunctions of H and extend x_ζ and y_ζ to genuinely independent variables. For ξ fixed, this is equivalent to considering r in the hyperbolic plane. This allows for interesting surfaces to emerge, connected to a new class of polynomials in two real variables. We take $\xi_1 = 1 = \xi_2$ and let $n_s = 25$ and $l_s = 12$ for $s = 1, 2$. In these plots, a cut at $y_\zeta = 0$ makes the hyperbolic part of u_{nl} vanish. The real part and real norm then coincide with the ones in the standard case.

There is another equivalent way to generate the radial surfaces in the

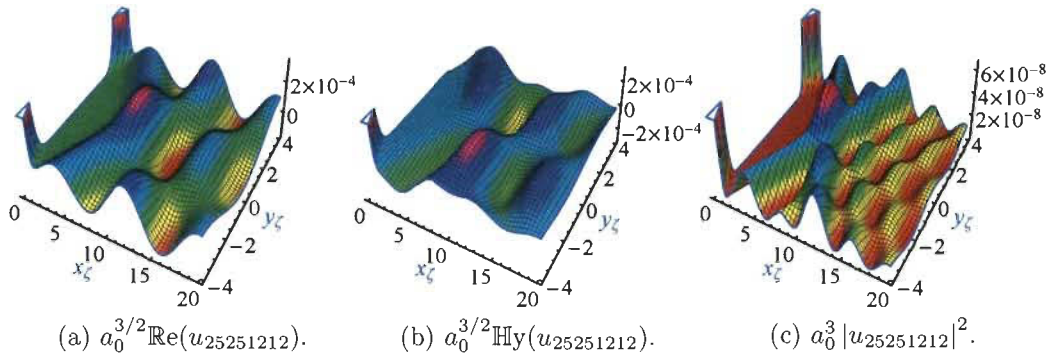


Figure 2: u_{nl} as a function of two independent variables.

hyperbolic basis $\{1, \mathbf{j}\}$ in the standard case. We can write eigenfunctions (54) as

$$u_{nl} = \sqrt{u_{nl}^0} \xi^{-3} e^{-\zeta/2} \ell_{nl}(\zeta),$$

where $\xi := x_\xi + y_\xi \mathbf{j}$, $\zeta := x_\zeta + y_\zeta \mathbf{j}$ and

$$\ell_{nl}(\zeta) := \zeta^l L_{n-l-1}^{2l+1}(\zeta) = \mathbb{R}e(\ell_{nl}(x_\zeta, y_\zeta)) + \mathbb{H}y(\ell_{nl}(x_\zeta, y_\zeta)) \mathbf{j},$$

where

$$L_{n-l-1}^{2l+1}(\zeta) := \sum_s L_{n_{\hat{s}}-l_{\hat{s}}-1}^{2l_{\hat{s}}+1}(\zeta_{\hat{s}}) \mathbf{e}_{\hat{s}}.$$

Using the correspondence between the idempotent and hyperbolic bases, one can easily show that

$$\xi^{-3} = \frac{1}{2} \left\{ (x_\xi + y_\xi)^{-3} + (x_\xi - y_\xi)^{-3} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ (x_\xi + y_\xi)^{-3} - (x_\xi - y_\xi)^{-3} \right\} \mathbf{j},$$

which we define as $x'_\xi + y'_\xi \mathbf{j}$. It is not difficult to show that the exponential transforms as

$$e^{-\zeta/2} = e^{-x_\zeta/2} \left\{ \cosh \frac{y_\zeta}{2} - \mathbf{j} \sinh \frac{y_\zeta}{2} \right\}.$$

This suggests that we can explicitly write

$$\begin{aligned} \mathbb{R}e(u_{nl}) &= \sqrt{u_{nl}^0} e^{-x_\zeta/2} \left[\left(x'_\xi \cosh \frac{y_\zeta}{2} - y'_\xi \sinh \frac{y_\zeta}{2} \right) \mathbb{R}e(\ell_{nl}(x_\zeta, y_\zeta)) \right. \\ &\quad \left. + \left(y'_\xi \cosh \frac{y_\zeta}{2} - x'_\xi \sinh \frac{y_\zeta}{2} \right) \mathbb{H}y(\ell_{nl}(x_\zeta, y_\zeta)) \right], \\ \mathbb{H}y(u_{nl}) &= \sqrt{u_{nl}^0} e^{-x_\zeta/2} \left[\left(x'_\xi \cosh \frac{y_\zeta}{2} - y'_\xi \sinh \frac{y_\zeta}{2} \right) \mathbb{H}y(\ell_{nl}(x_\zeta, y_\zeta)) \right. \\ &\quad \left. + \left(y'_\xi \cosh \frac{y_\zeta}{2} - x'_\xi \sinh \frac{y_\zeta}{2} \right) \mathbb{R}e(\ell_{nl}(x_\zeta, y_\zeta)) \right]. \end{aligned}$$

With a symbolic computation software, we can generate the polynomial $\ell_{nl}(\zeta)$ for any positive integers $n_{\hat{s}}$ and $l_{\hat{s}} \leq n_{\hat{s}} - 1$, for $s = 1, 2$. We then take $n = 25$, $l = 12$, $x_\xi = 1$, $y_\xi = 0$ (implying that $x'_\xi = 1$ and $y'_\xi = 0$), compute $\ell_{nl}(\zeta)$, transform ζ into $x_\zeta + y_\zeta \mathbf{j}$ and separate the real and hyperbolic parts to get $\mathbb{R}e(\ell_{nl}(x_\zeta, y_\zeta))$ and $\mathbb{H}y(\ell_{nl}(x_\zeta, y_\zeta))$ explicitly. If we plot the associated $a_0^{3/2} \mathbb{R}e(u)$, $a_0^{3/2} \mathbb{H}y(u)$ and $a_0^3 |u|^2$, we recover the results shown in fig. 2.

6 Discussion

We have solved the eigenvalue equation (43) for the discrete spectrum of the Coulomb potential hamiltonian (11) in the framework of bicomplex numbers. The continuous spectrum could also be worked out along similar lines. The eigenvalues corresponding to the discrete spectrum are given in (37) and the eigenfunctions in (52). Note that if $\xi_1 = 1 = \xi_2$, the standard wave functions can be recovered by letting $n_1 = n_2$, $l_1 = l_2$ and $m_1 = m_2$.

It is instructive to investigate the orthogonality properties of the eigenfunctions (52). Making use of definition (9) of the scalar product, one can write

$$\begin{aligned} (\psi_{nlm}, \psi_{n'l'm'}) &= \int \psi_{nlm}^\dagger(\mathbf{r}) \psi_{n'l'm'}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \\ &= \sum_s \mathbf{e}_s \int \psi_{n_s l_s m_s}^\dagger(\mathbf{r}) \psi_{n'_s l'_s m'_s}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (57)$$

It is well-known [24, 25] that the standard Coulomb problem eigenfunctions are orthonormal in all indices. This implies that

$$(\psi_{nlm}, \psi_{n'l'm'}) = \sum_s \mathbf{e}_s \delta_{n_s n'_s} \delta_{l_s l'_s} \delta_{m_s m'_s}. \quad (58)$$

From (58) we can draw two conclusions:

1. The eigenfunction ψ_{nlm} is normalized. Indeed

$$(\psi_{nlm}, \psi_{nlm}) = \sum_s \mathbf{e}_s \delta_{n_s n_s} \delta_{l_s l_s} \delta_{m_s m_s} = \sum_s \mathbf{e}_s = 1. \quad (59)$$

2. If $E_n - E_{n'}$ is not in the null cone, then ψ_{nlm} and $\psi_{n'l'm'}$ are orthogonal. Indeed from (37) we see that $E_n - E_{n'}$ is not in the null cone if and only if $n_s \neq n'_s$ for $s = 1, 2$. But then $\delta_{n_s n'_s} = 0$ for $s = 1, 2$ and the orthogonality follows from (58).

Let us consider the set of all finite linear combinations of eigenfunctions ψ_{nlm} , with bicomplex coefficients C_{nlm} . It is straightforward to show that this set makes up a \mathbb{T} -module, which we denote as \mathcal{M} . Defining X_i and P_k as in (39) and (41), one sees that these operators are well-defined on \mathcal{M} . Moreover, it is not difficult to show that properties (a)–(g) in sect. 3.1 are satisfied in \mathcal{M} , thus proving their consistency.

Of course, \mathcal{M} is not a Hilbert space, since the restriction to finite linear combinations entails that it is not complete. It is well-known that the Coulomb potential eigenfunctions in standard quantum mechanics, *i.e.* the $\psi_{n\bar{s}l\bar{s}m\bar{s}}$, make up an orthonormal system in the Hilbert space $L^2(\mathbb{R}^3)$ [5]. From [17], one concludes that the ψ_{nlm} make up an orthonormal system in a bicomplex Hilbert space $L^2(\mathbb{R}^3) \oplus L^2(\mathbb{R}^3)$.

We close this section with a result that we prove with the notation of the Coulomb problem, but that clearly holds more generally. Let U be a bicomplex linear operator, acting on \mathcal{M} , that commutes with H . Then

$$(E_n - E_{n'}) (\psi_{nlm}, U\psi_{n'l'm'}) = 0. \quad (60)$$

The proof is straightforward:

$$\begin{aligned} 0 &= (\psi_{nlm}, [H, U] \psi_{n'l'm'}) \\ &= (\psi_{nlm}, \{HU - UH\} \psi_{n'l'm'}) \\ &= (\psi_{nlm}, HU\psi_{n'l'm'}) - (\psi_{nlm}, UH\psi_{n'l'm'}) \\ &= (U^*H^*\psi_{nlm}, \psi_{n'l'm'}) - (\psi_{nlm}, UH\psi_{n'l'm'}) \\ &= E_n (U^*\psi_{nlm}, \psi_{n'l'm'}) - E_{n'} (\psi_{nlm}, U\psi_{n'l'm'}) \\ &= (E_n - E_{n'}) (\psi_{nlm}, U\psi_{n'l'm'}). \end{aligned}$$

This means that if $E_n - E_{n'}$ is not in the null cone, then $(\psi_{nlm}, U\psi_{n'l'm'})$ vanishes. In other words, $U\psi_{n'l'm'}$ is a linear combination of functions associated with eigenvalue $E_{n'}$.

7 Conclusion

We have shown that, just like the quantum harmonic oscillator problem [15], the quantum Coulomb problem can be solved in the framework of bicomplex numbers. We have obtained the eigenvalues and eigenfunctions of the bicomplex hamiltonian, and have shown that the eigenfunctions make up an orthonormal system in a bicomplex Hilbert space. The question is still open whether the constants ξ_1 and ξ_2 can be given a physical interpretation. In any case, it is likely that the mathematical properties of the functions we introduced can be fruitfully studied for their own sake.

Acknowledgments

LM and DR are grateful to the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada for financial support.

References

- [1] H. Reichenbach, *Philosophic Foundations of Quantum Mechanics* (Dover, Mineola, NY, 1998).
- [2] R. Penrose, *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe* (Knopf, New York, 2004).
- [3] J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* (Princeton University Press, Princeton, 1955).
- [4] J.M. Jauch, *Foundations of Quantum Mechanics* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1968).
- [5] E. Prugovečki, *Quantum Mechanics in Hilbert Space*, 2nd ed. (Dover, Mineola, NY, 2006).
- [6] L. Hardy, arXiv: quant-ph/0101012v4 (2001).
- [7] I.V. Volovich, arXiv: quant-ph/0212126v1 (2002).
- [8] H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, 2nd ed. (Dover, New York, 1950).
- [9] E.P. Wigner, *Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra* (Academic Press, New York, 1959).
- [10] S.L. Adler, *Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields* (Oxford University Press, Oxford, 1995).
- [11] G. Baley Price, *An Introduction to Multicomplex Spaces and Functions* (Marcel Dekker, New York, 1991).
- [12] D. Rochon, M. Shapiro, An. Univ. Oradea, Fasc. Mat. **11**, 71 (2004).
- [13] D. Rochon, S. Tremblay, Adv. Appl. Clifford Algebr. **14**, 231 (2004).

- [14] D. Rochon, S. Tremblay, *Adv. Appl. Clifford Algebr.* **16**, 135 (2006) doi: 10.1007/s00006-006-0008-5.
- [15] R. Gervais Lavoie, L. Marchildon, D. Rochon, *Nuovo Cimento* **125B**, 1173 (2010) doi: 10.1393/ncb/i2010-10927-x.
- [16] R. Gervais Lavoie, L. Marchildon, D. Rochon, *Adv. Appl. Clifford Algebr.* **21**, 561 (2011) doi: 10.1007/s00006-010-0274-0.
- [17] R. Gervais Lavoie, L. Marchildon, D. Rochon, *Ann. Funct. Analysis* **1**, 75 (2010).
- [18] R. Gervais Lavoie, D. Rochon, in *Theoretical Concepts of Quantum Mechanics* (InTech, 2012), p. 39 doi: 10.5772/2075.
- [19] W. Appel, *Mathematics for Physics and Physicists* (Princeton University Press, Princeton, 2007).
- [20] W. Pauli, *Z. Phys.* **36**, 336 (1926); English translation in *Sources of Quantum Mechanics*, edited by B. L. van der Waerden (Dover, New York, 1968), p. 387.
- [21] M.J. Englefield, *Group Theory and the Coulomb Problem* (Wiley, New York, 1972).
- [22] W. Greiner, B. Müller, *Quantum Mechanics: Symmetries*, 2nd ed. (Springer, Berlin, 1994).
- [23] E. Schrödinger, *Ann. Phys.* **79**, 361 (1926).
- [24] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Quantum Mechanics*, 2nd ed. (Wiley, New York, 1977).
- [25] L. Marchildon, *Quantum Mechanics: From Basic Principles to Numerical Methods and Applications* (Springer, Berlin, 2002).
- [26] A.R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, 2nd ed. (Princeton University Press, Princeton, 1960).

Chapitre 4

Conclusion

[...] the enormous usefulness of mathematics in the natural sciences is something bordering on the mysterious and [...] there is no rational explanation for it. –Eugene Wigner [53, p. 1].

Ici s'achève un petit bout de chemin et une modeste contribution à l'ambitieux projet de généraliser la mécanique quantique à l'algèbre des nombres bicomplexes. Les bases de l'algèbre linéaire bicomplexe ont déjà été établies et les espaces de Hilbert bicomplexes en dimension finie [40] ainsi qu'en dimension infinie [41] ont été préalablement analysés. Ces résultats ont servi d'arsenal mathématique dans la solution du problème fondamental de l'oscillateur harmonique quantique bicomplexe qui a constitué le premier accomplissement majeur dans cette direction [37]. Nous avons solutionné, à l'aide de certains autres outils mathématiques qui ont dû être développés en cours de route, le problème de l'atome d'hydrogène et des ions hydrogénoïdes bicomplexes en général.

Pour l'instant, nous ne proposons pas d'interprétation physique de nos résultats en ce sens que nous ne pouvons pas dire ce à quoi correspondent respectivement les composantes idempotentes des objets mathématiques du formalisme bicomplexe. Ce

mémoire et l'article qu'il présente est un second pas important dans ce projet d'exploration en physique mathématique. De plus, les solutions et leurs propriétés mathématiques potentielles seront sans aucun doute, en elles-mêmes, une source d'exploration future intéressante.

Les propriétés de la base idempotente et la dichotomie qu'elles apportent semblent être très appropriées pour généraliser les concepts mathématiques en des versions complexes séparées. En ce sens, il semble raisonnable de penser que le formalisme de la mécanique quantique pourra être généralisé en entier.

En conclusion, rien dans la nature ne nous indique de façon claire, précise et sans équivoque, quel est le formalisme mathématique le plus approprié à décrire le monde et quelles sont ses caractéristiques exactes. C'est même un mystère fondamental de l'Univers, à savoir pourquoi la mathématique semble-t-elle être le langage universel qui le décrit et comment se fait-il que les humains ait accès, du moins en bonne partie, à ses secrets les plus intimes ? !

Bibliographie

- [1] L. SMOLIN, *Three Roads to Quantum Gravity*. Basic Books, 2001.
- [2] H. REICHENBACH, *Philosophic Foundations of Quantum Mechanics*. Dover Publications, 1944.
- [3] A. KOYRÉ, *Du monde clos à l'univers infini*. Gallimard, 1973.
- [4] S. HAWKING, *Une brève histoire du temps*. Éditions J'ai lu, 1988.
- [5] S. W. HAWKING, *Sur les épaules des géants*. Dunod, Paris, 2003.
- [6] S. HAWKING ET L. MLODINOV, *The Grand Design*. Bantam Books, 2010.
- [7] H. REEVES, *Patience dans l'azur : L'évolution cosmique*. Éditions du Seuil, 1988.
- [8] H. REEVES, J. DE ROSNAY, Y. COPPENS, ET D. SIMONET, *La plus belle histoire du monde*. Éditions du Seuil, 1996.
- [9] H. REEVES, *Dernières nouvelles du cosmos*. Éditions du Seuil, 2002.
- [10] S. WEINBERG, *The First Three Minutes : A Modern View of the Origin of the Universe*. Fontana Paperbacks, 1976.
- [11] S. WEINBERG, *Le rêve d'une théorie ultime*. Odile Jacob, 1997.
- [12] R. FEYNMAN, *The Character of Physical Law*. The M.I.T. Press, 1985.
- [13] H. MARGENAU, *The Nature of Physical Reality*. McGraw-Hill, 1950.
- [14] R. LINDSAY ET H. MARGENAU, *Foundations of Physics*. Dover, 1963.
- [15] B. D'ESPAGNAT, *Veiled Reality : An Analysis of Present-Day Quantum Mechanical Concepts*. Westview Press, 2003.

- [16] J. GRIBBIN, *Schrödinger's Kittens and the Search for Reality : Solving the Quantum Mysteries*. Little, Brown and Company, 1995.
- [17] R. PENROSE, *The Road to Reality : A Complete Guide to the Laws of the Universe*. Knopf, 2004.
- [18] J. VON NEUMANN, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton University Press, 1955.
- [19] E. TAYLOR ET J. WHEELER, *Spacetime Physics*. W. H. Freeman and Company, 1966.
- [20] M. HOBSON, G. EFSTATHIOU, ET A. LASENBY, *General Relativity : An Introduction for Physicists*. Cambridge University Press, 2006.
- [21] H. GOLDSTEIN, C. POOLE, ET J. SAFKO, *Classical Mechanics*. Addison Wesley, third ed., 2002.
- [22] J. FINN, *Classical Mechanics*. Infinity Science Press, 2008.
- [23] C. COHEN-TANNOUDJI, B. DIU, ET F. LALOË, *Quantum Mechanics*. Wiley, 1977.
- [24] L. MARCHILDON, *Mécanique quantique*. De Boeck Université, 2000.
- [25] L. MARCHILDON, « Why should we interpret quantum mechanics ? », *Foundations of Physics*, vol. 34, pp. 1453–1466, 2004.
- [26] L. MARCHILDON, « Does quantum mechanics need interpretation ? », in *Proceedings of the Third International Conference on Quantum, Nano and Micro Technologies* (D. Avis et al., eds.), pp. 11–16, IEEE, Los Alamitos, 2009.
- [27] C. SEIFE, *Zéro : La biographie d'une idée dangereuse*. Éditions Jean-Claude Lattès, 2002.
- [28] G. HEMION, « Reality as complex space », *Internat. J. Theoret. Phys.*, vol. 28, no. 11, pp. 1372–1386, 1989.
- [29] G. PICKERT ET L. GÖRKE, « Construction of the system of real numbers », in *Foundations of Mathematics : The Real Number System and Algebra* (H. Behnke, F. Bachmann, K. Fladt, et W. Süss, eds.), ch. 1, pp. 89–165, The MIT Press, 1986.

- [30] G. BIRKHOFF ET J. VON NEUMANN, « The logic of quantum mechanics », *Ann. Phys.*, vol. 37, no. 4, pp. 823–843, 1936.
- [31] S. ADLER, *Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields*. Oxford University Press, 1995.
- [32] R. GERVAIS LAVOIE ET D. ROCHON, « The bicomplex Heisenberg uncertainty principle », in *Theoretical Concepts of Quantum Mechanics* (M. R. Pahlavani, ed.), ch. 3, pp. 39–64, InTech, 2012.
- [33] K. VAN VLAENDEREN ET A. WASER, « Generalisation of classical electrodynamics to admit a scalar field and longitudinal waves », *Hadronic J.*, vol. 24, pp. 609–628, 2001.
- [34] H. ANASTASSIU, P. ATLAMAZOGLOU, ET D. KAKLAMANI, « Application of bicomplex (quaternion) algebra to fundamental electromagnetics : A lower order alternative to the Helmholtz equation », *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 51, no. 8, pp. 2130–2136, 2003.
- [35] D. PAVLOV ET A. ELIOVICH, EDS., *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics Scientific Journal*, vol. 1. Russian Hypercomplex Society, 2004.
- [36] J. MATHIEU, L. MARCHILDON, ET D. ROCHON, « The bicomplex quantum Coulomb potential problem », *arXiv : math-ph/1207.0766v1*, 2012.
- [37] R. GERVAIS LAVOIE, L. MARCHILDON, ET D. ROCHON, « The bicomplex quantum harmonic oscillator », *Nuovo Cimento*, vol. 125B, pp. 1173–1192, 2010.
- [38] D. ROCHON ET S. TREMBLAY, « Bicomplex quantum mechanics : I. the generalized Schrödinger equation », *Adv. Appl. Clifford Algebr.*, vol. 14, no. 2, pp. 231–248, 2004.
- [39] D. ROCHON ET S. TREMBLAY, « Bicomplex quantum mechanics : II. the Hilbert space », *Adv. Appl. Clifford Algebr.*, vol. 16, no. 2, pp. 135–157, 2006.
- [40] R. GERVAIS LAVOIE, L. MARCHILDON, ET D. ROCHON, « Finite-dimensional bicomplex Hilbert spaces », *Adv. Appl. Clifford Algebr.*, vol. 21, no. 3, pp. 561–581, 2011.

- [41] R. GERVAIS LAVOIE, L. MARCHILDON, ET D. ROCHON, « Infinite-dimensional bicomplex Hilbert spaces », *Ann. Funct. Analysis*, vol. 1, no. 2, pp. 75–91, 2010.
- [42] H. BENSON, *Physique Mécanique*. Éditions du Renouveau Pédagogique, 2004.
- [43] W. THORBURN, « The myth of Occam's razor », *Mind, New Series*, vol. 27, no. 107, pp. 345–353, 1918.
- [44] I. NEWTON, *The Mathematical Principles of Natural Philosophy and the System of the World*. Daniel Adee, first american ed., 1846.
- [45] P. DIRAC, « The relation between mathematics and physics », in *Proceedings of the Royal Society (Edinburgh)*, vol. 59, pp. 122–129, February 1939.
- [46] A. EINSTEIN, *The Meaning of Relativity*. The Electric Book Company, sixth ed., 1955.
- [47] M. GELL-MANN, « Nature conformable to herself », *Complexity*, vol. 1, no. 4, pp. 9–12, 1996.
- [48] I. FALCONER, « Charles Augustin Coulomb and the fundamental law of electrostatics », *Metrologia*, vol. 41, pp. S107–S114, 1996.
- [49] S. POISSON, *Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs*. Académie Royale des Sciences, 1812.
- [50] P. LORRAIN ET D. CORSON, *Electromagnetic Fields and Waves*. Freeman, second ed., 1970.
- [51] B. THALLER, *Advanced Visual Quantum Mechanics*. Springer, 2005.
- [52] A. BEISER, *Concepts of Modern Physics*. McGraw-Hill, 2003.
- [53] E. WIGNER, « The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences », *Communications in Pure and Applied Mathematics*, vol. 13, no. 1, pp. 1–14, February 1960.
- [54] B. THALLER, *The N-Dimensional Coulomb Problem and its Application to Few-Particle Quantum Theory*. University of Bergen, 2006.
- [55] M. FUTAGAWA, « On the theory of functions of a quaternary variables », *Tôhoku Math. J.*, vol. 29, pp. 175–222, 1928 ; vol. 35, pp. 69–120, 1932.

- [56] G. PRICE, *An Introduction to Multicomplex Spaces and Functions*. Marcel Dekker, 1991.
- [57] D. ROCHON ET M. SHAPIRO, « On algebraic properties of bicomplex and hyperbolic numbers », *An. Univ. Oradea, Fasc. Mat.*, vol. 11, pp. 71–110, 2004.
- [58] S. LIPSCHUTZ, *Schaum's Outline of Theory and Problems of Linear Algebra*. McGraw-Hill, second ed., 1991.
- [59] B. HARTLEY ET T. HAWKES, *Rings, Modules and Linear Algebra*. Chapman and Hall, 1970.
- [60] P. SZEKERES, *A Course in Modern Mathematical Physics : Groups, Hilbert Spaces and Differential Geometry*. Cambridge University Press, 2004.
- [61] I. GOOD, *The Scientist Speculates : An Anthology of Partly-Baked Ideas*. Heinemann, 1962.
- [62] W. GREINER ET B. MÜLLER, *Quantum Mechanics : Symmetries*. Springer, 1994.
- [63] M. ENGLEFIELD, *Group Theory and the Coulomb Problem*. Wiley, 1972.

A Programmes Mathematica

Le but de cet appendice est de présenter trois programmes qui ont été développés avec le logiciel de calcul symbolique et numérique Mathematica 8. Ces programmes ont été conçus afin de tracer et d’analyser, à l’aide de l’éq. (55) de l’article [36], le comportement des fonctions radiales hyperboliques $u_{nl}(r)$ d’un ion hydrogénoïde.

A.1 Fonctions radiales hyperboliques

A.1.1 Composantes idempotentes, cas standard

Dans le premier programme, nous commençons par analyser les composantes idempotentes des fonctions u_{nl} , c’est-à-dire les fonctions $u_{n_{\hat{s}}l_{\hat{s}}}$ de l’éq. (50) de [36]. Nous confirmons que les propriétés de la base idempotente ont bien conduit à des résultats qui constituent une dichotomie parfaite du cas standard. C’est dire que chacune des fonctions $u_{n_{\hat{s}}l_{\hat{s}}}$ pour $s = 1, 2$ et $\xi_1 = \xi_2 = 1$, représente un état propre radial standard qu’on retrouve dans la littérature [23, 24].

Remove["Global`*"]

Programme 1 : Composantes idempotentes, cas standard

Définissons quelques constantes. Les valeurs données ici sont celles publiées sur <http://www.physics.nist.gov> (CODATA 2010).

```

Z = 1; (*nombre de protons*)
ns = 1; (*nombre quantique principal : niveau d'énergie*)
ls = 0; (*nombre quantique orbital : plus petit ou égal à ns-1*)
ξs = 1; (*facteur de dilatation de ħ*)
c0 = 299792458; (*vitesse de la lumière dans le vide [m s-1]*
μ0 = 4 π * 10-7; (*perméabilité du vide [N A-2]*
ε0 =  $\frac{1}{c0^2 \mu0}$ ; (*permittivité du vide [F m-1]*
me = 9.10938291 * 10-31; (*masse de l'électron [kg]*
mp = 1.672621777 * 10-27; (*masse du proton [kg]*
μ =  $\frac{me (mp Z)}{me + mp Z}$ ; (*masse réduite d'un ion hydrogénoïde [kg]*
qe = 1.602176565 * 10-19; (*charge électrique du proton [C]*
eq = Sqrt[ $\frac{qe^2}{4 \pi \epsilon0}$ ]; (*Charge électrique réduite [C F-1/2 m1/2]*
hb =  $\frac{6.62606957 * 10^{-34}}{2 \pi}$ ; (*constante de Planck réduite [J s]*
a0 =  $\frac{hb^2}{\mu eq^2}$ ; (*rayon de Bohr [m]*

```

La constante de normalisation de la fonction radiale est

$$u0nsls[ns_ , ls_] := \left(\frac{2 Z}{ns a0} \right)^3 \xi s^{-6} \frac{(ns - ls - 1)!}{2 ns (ns + ls)!}$$

La fonction radiale hydrogénoïde s'écrit

$$unsls[\xi s_ , ns_ , ls_] := (u0nsls[ns, ls])^{1/2} \text{Exp}\left[\frac{-\xi s}{2}\right] \xi s^{ls} \text{LaguerreL}[ns - ls - 1, 2 ls + 1, \xi s]$$

On vérifie que pour ce ns et ce ls, la somme des probabilités de présence converge vers l'unité. La forme exacte est due à la fonction de poids r^2 et dr .

$$\text{Integrate}\left[\left(\frac{2 Z}{ns a0}\right)^{-3} \xi s^6 \xi s^2 unsls[\xi s, ns, ls]^2, \{\xi s, 0, \text{Infinity}\}\right]$$

On libère les constantes ns et ls de leur valeur fixée et on teste pour voir si toute valeur de $1 \leq ns < \infty$ et $0 \leq ls \leq ns-1$ génère une solution normalisée.

```

Clear[ns, ls]

Table[Integrate[ $\left(\frac{2 Z}{n_s a_0}\right)^{-3} \xi s^6 \xi s^2 \text{unsls}[\xi s, n_s, l_s]^2, \{\xi s, 0, \text{Infinity}\}],$ 
  {ns, 1, 5, 1}, {ls, 0, ns - 1, 1}]

Traçons toutes les fonctions d'onde radiales u associées à ls pour un ns donné.

Clear[ns, ls]
fctsrasthan = Table[Plot[Evaluate[Table[a03/2 unsls[ξs, ns, ls], {ls, 0, ns - 1, 1}]],
  {ξs, 0, 20}, PlotStyle -> {Thickness[0.006]}, PlotRange -> Automatic,
  ImageSize -> 300, PlotPoints -> 30, MaxRecursion -> 5, AxesStyle -> Thickness[0.005],
  Ticks -> Automatic, TicksStyle -> Directive[20], AxesLabel ->
  {Text[Style["ξ", Blue, 24]], Text[Style["a03/2un1", Blue, 24]]}], {ns, 1, 9, 1}]

Générons et exportons en .png ces images l'une après l'autre à l'aide de
l'algorithme suivant. On change (ns=1,fctsrasthanA) pour (ns=2,fctsrasthanB)...

Clear[ns]
ns = 1;
fctsrasthanA = Plot[Evaluate[Table[a03/2 unsls[ξs, ns, ls], {ls, 0, ns - 1, 1}]],
  {ξs, 0, 20}, PlotRange -> Automatic, ImageSize -> 300,
  PlotStyle -> Directive[Thickness[0.006]], PlotPoints -> 30, MaxRecursion -> 5,
  AxesStyle -> Thickness[0.005], Ticks -> Automatic, TicksStyle -> Directive[20],
  AxesLabel -> {Text[Style["ξ", Blue, 24]], Text[Style["a03/2un1", Blue, 24]]}];
I1 = ImageCrop[Rasterize[fctsrasthanA, ImageSize -> 800, ImageResolution -> 300]];
Export["fctsrasthanA.png", I1];

Traçons toutes les densités de probabilités de la fonction d'onde radiale
qui sont associées à ls pour un ns donné

Clear[ns, ls]
densiprob =
  Table[Plot[Evaluate[Table[a03 unsls[ξs, ns, ls]2, {ls, 0, ns - 1, 1}]], {ξs, 0, 8},
    PlotRange -> Automatic, ImageSize -> 300, PlotStyle -> Directive[Thickness[0.006]],
    PlotPoints -> 30, MaxRecursion -> 5, AxesStyle -> Thickness[0.005],
    Ticks -> Automatic, TicksStyle -> Directive[20], AxesLabel ->
    {Text[Style["ξ", Blue, 24]], Text[Style["a03un12", Blue, 24]]}], {ns, 1, 9, 1}]

Clear[ns]
ns = 1;
densiprobA = Plot[Evaluate[Table[a03 unsls[ξs, ns, ls]2, {ls, 0, ns - 1, 1}]],
  {ξs, 0, 8}, PlotRange -> Automatic, ImageSize -> 300,
  PlotStyle -> Directive[Thickness[0.006]], PlotPoints -> 30, MaxRecursion -> 5,
  AxesStyle -> Thickness[0.005], Ticks -> Automatic, TicksStyle -> Directive[20],
  AxesLabel -> {Text[Style["ξ", Blue, 24]], Text[Style["a03un12", Blue, 24]]}];
I2 = ImageCrop[Rasterize[densiprobA, ImageSize -> 800, ImageResolution -> 300]];
Export["densiprobA.png", I2];

```

A.1.2 Surfaces hyperboliques générales

Dans cette section, nous développons le deuxième programme afin de représenter graphiquement la partie réelle, la partie imaginaire hyperbolique ainsi que le carré de la norme réelle de la fonction d'onde radiale hyperbolique u_{nl} . Ces fonctions sont exprim es par rapport aux variables x_ζ, y_ζ qui sont consid r es indépendantes, malgré le fait que l'éq. (51) nous montre très bien qu'elles ne le sont pas. Ces fonctions correspondent toutes à des surfaces tridimensionnelles dans \mathbb{R}^3 et ce, pour n'importe quel état propre correspondant à un sextuplet $(n_1, n_2, l_1, l_2, m_1, m_2)$ avec des valeurs de ξ_1, ξ_2 données. En choisissant différentes valeurs de ξ_1 et ξ_2 , on change la forme des surfaces d'ondes.

Lorsque nous imposons la contrainte $v_1 = v_2$ pour tout $v \in \{n, l, m\}$, on retombe sur le cas standard avec seulement ξ_1 et ξ_2 permettant à ζ d'être hyperbolique. Lorsque ces deux paramètres valent respectivement un, nous avons $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$. Alors, la partie imaginaire hyperbolique s'annule et la partie réelle coïncide avec la fonction radiale standard en deux dimensions que nous avons obtenue dans le premier programme.

Finalement, la partie réelle, la partie imaginaire hyperbolique et la norme des fonctions d'ondes hyperboliques de l'atome d'hydrogène sont tra  es en fonction exclusivement de r .

Remove["Global`*"]

Programme 2 : Surfaces hyperboliques générales

Définissons quelques constantes.

```

Z = 1; (*nombre de protons*)
n1 = 22; (*1er nombre quantique principal : niveau d'énergie 1*)
n2 = 18; (*2e nombre quantique principal : niveau d'énergie 2*)
l1 = 4; (*1er nombre quantique orbital : plus petit ou égal à n1-1*)
l2 = 17; (*2e nombre quantique orbital : plus petit ou égal à n2-1*)
ξ1 = π; (*1er facteur de dilatation de ħ*)
ξ2 = E; (*2e facteur de dilatation de ħ*)
c0 = 299792458; (*vitesse de la lumière dans le vide [m s-1]*)
μ0 = 4 π * 10-7; (*perméabilité du vide [N A-2]*)
ε0 =  $\frac{1}{c0^2 \mu0}$ ; (*permittivité du vide [F m-1]*)
me = 9.10938291 * 10-31; (*masse de l'électron [kg]*)
mp = 1.672621777 * 10-27; (*masse du proton [kg]*)
μ =  $\frac{me (mp Z)}{me + mp Z}$ ; (*masse réduite d'un ion hydrogénoïde [kg]*)
qe = 1.602176565 * 10-19; (*charge électrique du proton [C]*)
eq = Sqrt[ $\frac{qe^2}{4 \pi \epsilon0}$ ]; (*Charge électrique réduite [C F-1/2 m1/2]*)
hb =  $\frac{6.62606957 * 10^{-34}}{2 \pi}$ ; (*constante de Planck réduite [J s]*)
a0 =  $\frac{\hbar^2}{\mu eq^2}$ ; (*rayon de Bohr [m]*)

```

Les constantes de normalisation sont

$$u0n1l1[n1_ , l1_] := \left(\frac{2 Z}{n1 a0} \right)^3 \xi1^{-6} \frac{(n1 - l1 - 1)!}{2 n1 (n1 + l1)!}$$

$$u0n2l2[n2_ , l2_] := \left(\frac{2 Z}{n2 a0} \right)^3 \xi2^{-6} \frac{(n2 - l2 - 1)!}{2 n2 (n2 + l2)!}$$

Les composantes bicomplexes de la fonction radiale sont


```
un111[ξ1_, n1_, l1_] :=
  (u0n111[n1, l1])1/2 Exp[ $-\frac{\xi_1}{2}$ ] ξ1l1 LaguerreL[n1 - l1 - 1, 2 l1 + 1, ξ1]
un212[ξ2_, n2_, l2_] := (u0n212[n2, l2])1/2
  Exp[ $-\frac{\xi_2}{2}$ ] ξ2l2 LaguerreL[n2 - l2 - 1, 2 l2 + 1, ξ2]
```

La partie réelle de la fonction radiale dans la représentation hyperbolique s'écrit

$$\text{Reunl}[\xi_1, \xi_2, n_1, n_2, l_1, l_2] := \frac{1}{2} \text{un111}[\xi_1, n_1, l_1] + \frac{1}{2} \text{un212}[\xi_2, n_2, l_2]$$

La partie imaginaire hyperbolique est donnée par

$$\text{Hyunl}[\xi_1, \xi_2, n_1, n_2, l_1, l_2] := \frac{1}{2} \text{un111}[\xi_1, n_1, l_1] - \frac{1}{2} \text{un212}[\xi_2, n_2, l_2]$$

et la norme réelle de la fonction radiale est

$$\text{Nunl}[\xi_1, \xi_2, n_1, n_2, l_1, l_2] := \sqrt{\text{Reunl}[\xi_1, \xi_2, n_1, n_2, l_1, l_2]^2 + \text{Hyunl}[\xi_1, \xi_2, n_1, n_2, l_1, l_2]^2}$$

On regarde la forme de ces fonctions pour les valeurs de ξ1, ξ2, n1, n2, l1 et l2 que nous avons entrées. Ce sont bien des polynômes des deux variables ξ1 et ξ2 !

```
Reunl[ξ1, ξ2, n1, n2, l1, l2]
Hyunl[ξ1, ξ2, n1, n2, l1, l2]
Nunl[ξ1, ξ2, n1, n2, l1, l2]
```

Cas général ξ1, ξ2 > 0, n1 ∈ {1, 2, ..., ∞}, n2 ∈ {1, 2, ..., ∞}, l1 ∈ {0, 1, ..., n1-1} et l2 ∈ {0, 1, ..., n2-1}

Définissons de nouveaux ξ1, ξ2, n1, n2, l1 et l2.

```
Clear[ξ1, ξ2, n1, n2, l1, l2]
n1 = 15; n2 = 18; l1 = 12; l2 = 9; ξ1 = π; ξ2 = E;
```

On peut tracer la fonction Reunl par rapport aux composantes hyperboliques de ξ en effectuant un changement de variables sur ses composantes bicomplexes.

```
PhyReu15v18v12v9xilepixi2ee = Plot3D[a03/2 Reunl[x + y, x - y, n1, n2, l1, l2],
  {x, 0, 20}, {y, -4, 4}, ImageSize → 450, Mesh → 50, MeshStyle → Automatic,
  ColorFunctionScaling → True, ColorFunction → Function[{x, y, z}, Hue[z]],
  BoundaryStyle → Directive[Blue, Thickness[0.006]], PlotStyle → Opacity[1],
  Axes → True, AxesEdge → {Automatic, Automatic, {1, 1}},
  AxesStyle → Thickness[0.007], Boxed → False, PlotRange → Automatic,
  AspectRatio → 1, MaxRecursion → 6, PlotPoints → 120,
  Ticks → {Automatic, Automatic, {{-10-5, "-10-5"}, {2 * 10-5, "2 × 10-5"}}},
  TicksStyle → Directive[50], AxesLabel → {Text[Style["xξ", Blue, 55]],
    Text[Style["yξ", Blue, 55]] (*, Text[Style["a03/2 Reunl", Blue, 55]] *)}]
```

On génère et exporte l'image en png.

```

I1 = ImageCrop[
  Rasterize[PhyReul5v18v12v9xilepiki2ee, ImageSize → 800, ImageResolution → 300]];
Export["PhyReul5v18v12v9xilepiki2ee.png", I1];

Similairement pour Hyunl, on a

PhyHyul5v18v12v9xilepiki2ee = Plot3D[a03/2 Hyunl[x + y, x - y, n1, n2, l1, l2],
  {x, 0, 20}, {y, -4, 4}, ImageSize → 450, Mesh → 50, MeshStyle → Automatic,
  ColorFunctionScaling → True, ColorFunction → Function[{x, y, z}, Hue[z]],
  BoundaryStyle → Directive[Blue, Thickness[0.006]], PlotStyle → Opacity[1],
  Axes → True, AxesEdge → {Automatic, Automatic, {1, 1}}, AxesStyle → Thickness[0.007],
  Boxed → False, PlotRange → Automatic, AspectRatio → 1, MaxRecursion → 6,
  PlotPoints → 120, Ticks → {Automatic, Automatic, {{0, "0"}, {2 * 10-5, "2×10-5"}}},
  TicksStyle → Directive[50], AxesLabel → {Text[Style["xξ", Blue, 55]],
    Text[Style["yξ", Blue, 55]] (*, Text[Style["a03/2Hyunl", Blue, 55]] *)}

I2 = ImageCrop[
  Rasterize[PhyHyul5v18v12v9xilepiki2ee, ImageSize → 800, ImageResolution → 300]];
Export["PhyHyul5v18v12v9xilepiki2ee.png", I2];

Finalement, pour le carré de Nunl,

PhyNul5v18v12v9xilepiki2ee = Plot3D[a03 Nunl[x + y, x - y, n1, n2, l1, l2]2,
  {x, 0, 20}, {y, -4, 4}, ImageSize → 450, Mesh → 50, MeshStyle → Automatic,
  ColorFunctionScaling → True, ColorFunction → Function[{x, y, z}, Hue[z]],
  BoundaryStyle → Directive[Blue, Thickness[0.006]], PlotStyle → Opacity[1],
  Axes → True, AxesEdge → {Automatic, Automatic, {1, 1}},
  AxesStyle → Thickness[0.007], Boxed → False, PlotRange → Automatic,
  AspectRatio → 1, MaxRecursion → 6, PlotPoints → 120,
  Ticks → {Automatic, Automatic, {{2 * 10-10, "2×10-10"}, {4 * 10-10, "4×10-10"}}},
  TicksStyle → Directive[50], AxesLabel → {Text[Style["xξ", Blue, 55]],
    Text[Style["yξ", Blue, 55]] (*, Text[Style["a03Nunl2", Blue, 55]] *)}

I3 = ImageCrop[
  Rasterize[PhyNul5v18v12v9xilepiki2ee, ImageSize → 800, ImageResolution → 300]];
Export["PhyNul5v18v12v9xilepiki2ee.png", I3];

Domaine standard ξ=1, n∈{1,2,..., ∞} et l∈{0,1,...,n-1}

On trace des surfaces d'onde radiales pour Reunl, Hyunl et le carré de Nunl
avec ξ1=ξ2, n1=n2 et l1=l2 en considérant tout de même ξ comme une quantité
hyperbolique. C'est le cas standard en 3d.

Clear[ξ1, ξ2, n1, n2, l1, l2]
n1 = n; n2 = n; n = 25; l1 = 1; l2 = 1; l = 12; ξ1 = ξ; ξ2 = ξ; ξ = 1;

```

```
PhyReu25v25v12v12xi1elp00xi2elp00 = Plot3D[a03/2 Reunl[x + y, x - y, n1, n2, 11, 12],
  {x, 0, 20}, {y, -4, 4}, ImageSize → 450, Mesh → 50, MeshStyle → Automatic,
  ColorFunctionScaling → True, ColorFunction → Function[{x, y, z}, Hue[z]],
  BoundaryStyle → Directive[Blue, Thickness[0.006]], PlotStyle → Opacity[1],
  Axes → True, AxesEdge → {Automatic, Automatic, {1, 1}}, AxesStyle → Thickness[0.007],
  Boxed → False, PlotRange → Automatic, AspectRatio → 1, MaxRecursion → 6,
  PlotPoints → 120, Ticks → {Automatic, Automatic, {{0, "0"}, {2 * 10-4, "2×10-4"}}},
  TicksStyle → Directive[50], AxesLabel → {Text[Style["xξ", Blue, 55]],
  Text[Style["yξ", Blue, 55]] (*, Text[Style["a03/2Reunl", Blue, 55]] *)}]
```

```
I4 = ImageCrop[Rasterize[
  PhyReu25v25v12v12xi1elp00xi2elp00, ImageSize → 800, ImageResolution → 300]];
Export["PhyReu25v25v12v12xi1elp00xi2elp00.png", I4];
```

```
PhyHyu25v25v12v12xi1elp00xi2elp00 = Plot3D[a03/2 Hyunl[x + y, x - y, n1, n2, 11, 12],
  {x, 0, 20}, {y, -4, 4}, ImageSize → 450, Mesh → 50, MeshStyle → Automatic,
  ColorFunctionScaling → True, ColorFunction → Function[{x, y, z}, Hue[z]],
  BoundaryStyle → Directive[Blue, Thickness[0.006]], PlotStyle → Opacity[1],
  Axes → True, AxesEdge → {Automatic, Automatic, {1, 1}},
  AxesStyle → Thickness[0.007], Boxed → False, PlotRange → Automatic,
  AspectRatio → 1, MaxRecursion → 6, PlotPoints → 120,
  Ticks → {Automatic, Automatic, {{-2 * 10-4, "-2×10-4"}, {0, "0"}, {2 * 10-4, "2×10-4"}}},
  TicksStyle → Directive[50], AxesLabel → {Text[Style["xξ", Blue, 55]],
  Text[Style["yξ", Blue, 55]] (*, Text[Style["a03/2Hyunl", Blue, 55]] *)}]
```

```
I5 = ImageCrop[Rasterize[
  PhyHyu25v25v12v12xi1elp00xi2elp00, ImageSize → 800, ImageResolution → 300]];
Export["PhyHyu25v25v12v12xi1elp00xi2elp00.png", I5];
```

```
PhyNu25v25v12v12xi1elp00xi2elp00 = Plot3D[a03 Nunl[x + y, x - y, n1, n2, 11, 12]2,
  {x, 0, 20}, {y, -4, 4}, ImageSize → 450, Mesh → 50, MeshStyle → Automatic,
  ColorFunctionScaling → True, ColorFunction → Function[{x, y, z}, Hue[z]],
  BoundaryStyle → Directive[Blue, Thickness[0.006]], PlotStyle → Opacity[1],
  Axes → True, AxesEdge → {Automatic, Automatic, {1, 1}},
  AxesStyle → Thickness[0.007], Boxed → False, PlotRange → Automatic,
  AspectRatio → 1, MaxRecursion → 6, PlotPoints → 120, Ticks → {Automatic,
  Automatic, {{2 * 10-8, "2×10-8"}, {4 * 10-8, "4×10-8"}, {6 * 10-8, "6×10-8"}}},
  TicksStyle → Directive[50], AxesLabel → {Text[Style["xξ", Blue, 55]],
  Text[Style["yξ", Blue, 55]] (*, Text[Style["a03Nunl2", Blue, 55]] *)}]
```

```
I6 = ImageCrop[
  Rasterize[PhyNu25v25v12v12xi1elp00xi2elp00, ImageSize → 800, ImageResolution → 300]];
Export["PhyNu25v25v12v12xi1elp00xi2elp00.png", I6];
```

Fonctions propres 2D dépendantes de $\rho := 2Zr/a_0$

```
Clear[ξ1, ξ2, n1, n2, 11, 12]
n1 = 8; n2 = 7; 11 = 6; 12 = 5; ξ1 = 1.00; ξ2 = 0.52;
```

Clear[ξ_2]

PhyReu2D8v7v6v5xilelp00xi2e0p52alp00i0p12 =

```
Plot[Evaluate[Table[a03/2 Reunl[ $\rho \frac{\xi_1^{-2}}{n_1}, \rho \frac{\xi_2^{-2}}{n_2}, n_1, n_2, 11, 12$ ], { $\xi_2, 0.52, 1, 0.12$ }]],
{ $\rho, 0, 249$ }, ImageSize → 800,
PlotStyle → {{Red, Thickness[0.01]}, {Green, Thickness[0.01]},
{Blue, Thickness[0.01]}, {Yellow, Thickness[0.01]}, {Purple, Thickness[0.01]}},
Axes → True, AxesStyle → Thickness[0.006], PlotRange → {{0, 249}, {-0.025, 0.025}},
AspectRatio → 1, MaxRecursion → 8, PlotPoints → 200,
Ticks → Automatic, TicksStyle → Directive[40],
AxesLabel → {Text[Style[" $\rho$ ", Blue, 45]] (*, Text[Style["Re(u)", Blue, 45]] *)}]
```

I7 = ImageCrop[Rasterize[PhyReu2D8v7v6v5xilelp00xi2e0p52alp00i0p12,

ImageSize → 800, ImageResolution → 300]];

Export["PhyReu2D8v7v6v5xilelp00xi2e0p52alp00i0p12.png", I7];

Clear[ξ_2]

PhyHyu2D8v7v6v5xilelp00xi2e0p52alp00i0p12 =

```
Plot[Evaluate[Table[a03/2 Hyunl[ $\rho \frac{\xi_1^{-2}}{n_1}, \rho \frac{\xi_2^{-2}}{n_2}, n_1, n_2, 11, 12$ ], { $\xi_2, 0.52, 1, 0.12$ }]],
{ $\rho, 0, 249$ }, ImageSize → 800,
PlotStyle → {{Red, Thickness[0.01]}, {Green, Thickness[0.01]},
{Blue, Thickness[0.01]}, {Yellow, Thickness[0.01]}, {Purple, Thickness[0.01]}},
Axes → True, AxesStyle → Thickness[0.006], PlotRange → {{0, 249}, {-0.025, 0.025}},
AspectRatio → 1, MaxRecursion → 8, PlotPoints → 200,
Ticks → Automatic, TicksStyle → Directive[40],
AxesLabel → {Text[Style[" $\rho$ ", Blue, 45]] (*, Text[Style["Hy(u)", Blue, 45]] *)}]
```

I8 = ImageCrop[Rasterize[PhyHyu2D8v7v6v5xilelp00xi2e0p52alp00i0p12,

ImageSize → 800, ImageResolution → 300]];

Export["PhyHyu2D8v7v6v5xilelp00xi2e0p52alp00i0p12.png", I8];

Clear[ξ_2]

PhyNu2D8v7v6v5xilelp00xi2e0p52alp00i0p12 =

```
Plot[Evaluate[Table[a03/2 Nunl[ $\rho \frac{\xi_1^{-2}}{n_1}, \rho \frac{\xi_2^{-2}}{n_2}, n_1, n_2, 11, 12$ ], { $\xi_2, 0.52, 1.00, 0.12$ }]],
{ $\rho, 0, 249$ }, ImageSize → 800,
PlotStyle → {{Red, Thickness[0.01]}, {Green, Thickness[0.01]},
{Blue, Thickness[0.01]}, {Yellow, Thickness[0.01]}, {Purple, Thickness[0.01]}},
Axes → True, AxesStyle → Thickness[0.006], PlotRange → {{0, 249}, {0, 0.029}},
AspectRatio → 1, MaxRecursion → 8, PlotPoints → 200,
Ticks → {Automatic, Automatic}, TicksStyle → Directive[40],
AxesLabel → {Text[Style[" $\rho$ ", Blue, 45]] (*, Text[Style["|u|2", Blue, 45]] *)}]
```

I9 = ImageCrop[Rasterize[PhyNu2D8v7v6v5xilelp00xi2e0p52alp00i0p12,

ImageSize → 800, ImageResolution → 300]];

Export["PhyNu2D8v7v6v5xilelp00xi2e0p52alp00i0p12.png", I9];

A.1.3 Surfaces hyperboliques standard

Cette dernière section est consacrée au développement du troisième programme Mathematica. Il consiste en une approche mathématique différente qui explicite le rôle joué par chacune des quantités hyperboliques intervenant dans nos solutions radiales. Celle-ci fait ressortir explicitement la nature de ces fonctions comment étant des polynômes réels de deux variables réelles. C'est une confirmation des résultats obtenus avec les programmes 1 et 2 qui met en lumière des polynômes de Laguerre généralisés à deux variables indépendantes dans le plan hyperbolique. Il donne également une idée de comment travailler avec l'algèbre hyperbolique sur Mathematica sans pour autant définir celle-ci.

Remove["Global`*"]

Programme 3 : Surfaces hyperboliques standard

Définissons quelques constantes.

$Z = 1$; (*nombre de protons*)

$c0 = 299792458$; (*vitesse de la lumière dans le vide $[m s^{-1}]$ *)

$\mu0 = 4 \pi * 10^{-7}$; (*perméabilité du vide $[N A^{-2}]$ *)

$\epsilon0 = \frac{1}{c0^2 \mu0}$; (*permittivité du vide $[F m^{-1}]$ *)

$me = 9.10938291 * 10^{-31}$; (*masse de l'électron $[kg]$ *)

$mp = 1.672621777 * 10^{-27}$; (*masse du proton $[kg]$ *)

$\mu = \frac{me (mp Z)}{me + mp Z}$; (*masse réduite d'un ion hydrogénoïde $[kg]$ *)

$qe = 1.602176565 * 10^{-19}$; (*charge électrique du proton $[C]$ *)

$eq = \text{Sqrt}\left[\frac{qe^2}{4 \pi \epsilon0}\right]$; (*Charge électrique réduite $[C F^{-1/2} m^{1/2}]$ *)

$hb = \frac{6.62606957 * 10^{-34}}{2 \pi}$; (*constante de Planck réduite $[J s]$ *)

$a0 = \frac{hb^2}{\mu eq^2}$; (*rayon de Bohr $[m]$ *)

La constante de normalisation de la fonction radiale est

$$u0nl[n_, l_] := \left(\frac{2 Z}{n a0}\right)^3 \frac{(n-1-l)!}{2 n (n+1)!}$$

La partie réelle et la partie imaginaire hyperbolique de $\xi^{(-3)}$ sont respectivement données par

$$x\xi p[x\xi_, y\xi_] := \frac{(x\xi + y\xi)^{-3} + (x\xi - y\xi)^{-3}}{2}$$

$$y\xi p[x\xi_, y\xi_] := \frac{(x\xi + y\xi)^{-3} - (x\xi - y\xi)^{-3}}{2}$$

On définit la fonction lnl comme

$$lnl[n_, l_, \xi_] := \xi^1 \text{LaguerreL}[n-1-l, 2 l+1, \xi]$$

Avec la commande suivante, on peut générer n'importe lequel des polynômes ci-dessus pour un ξ hyperbolique. La commande Collect simplifie dans la forme $Re(lnl) + Hy(lnl)j$. Par exemple, pour $n=25$ et $l=12$,

```
Collect[Expand[lnl[25, 12, x + y j]] /. {j^1 -> j, j^2 -> 1, j^3 -> j, j^4 -> 1, j^5 -> j, j^6 -> 1,
j^7 -> j, j^8 -> 1, j^9 -> j, j^10 -> 1, j^11 -> j, j^12 -> 1, j^13 -> j, j^14 -> 1, j^15 -> j, j^16 -> 1,
j^17 -> j, j^18 -> 1, j^19 -> j, j^20 -> 1, j^21 -> j, j^22 -> 1, j^23 -> j, j^24 -> 1, j^25 -> j}, j]
```

En effectuant un copier-coller, on extrait manuellement la partie réelle et la partie imaginaire hyperbolique générée précédemment qu'on écrit respectivement comme

$$\begin{aligned}
 \text{Rel2512}[x_ , y_] := & 1852482996 x^{12} - 854992152 x^{13} + 174165068 x^{14} - \frac{62201810 x^{15}}{3} + \\
 & \frac{3217335 x^{16}}{2} - \frac{428978 x^{17}}{5} + \frac{48433 x^{18}}{15} - \frac{6919 x^{19}}{80} + \frac{629 x^{20}}{384} - \frac{37 x^{21}}{1728} + \frac{37 x^{22}}{201600} - \\
 & \frac{37 x^{23}}{39916800} + \frac{x^{24}}{479001600} + 122263877736 x^{10} y^2 - 66689387856 x^{11} y^2 + 15849021188 x^{12} y^2 - \\
 & 2177063350 x^{13} y^2 + 193040100 x^{14} y^2 - \frac{58341008 x^{15} y^2}{5} + \frac{2470083 x^{16} y^2}{5} - \\
 & \frac{1183149 x^{17} y^2}{80} + \frac{59755 x^{18} y^2}{192} - \frac{1295 x^{19} y^2}{288} + \frac{407 x^{20} y^2}{9600} - \frac{851 x^{21} y^2}{3628800} + \\
 & \frac{23 x^{22} y^2}{39916800} + 916979083020 x^8 y^4 - 611319388680 x^9 y^4 + 174339233068 x^{10} y^4 - \\
 & 28301823550 x^{11} y^4 + 2927774850 x^{12} y^4 - 204193528 x^{13} y^4 + 9880332 x^{14} y^4 - \\
 & \frac{6704511 x^{15} y^4}{20} + \frac{1015835 x^{16} y^4}{128} - \frac{24605 x^{17} y^4}{192} + \frac{7733 x^{18} y^4}{5760} - \frac{851 x^{19} y^4}{103680} + \\
 & \frac{23 x^{20} y^4}{1036800} + 1711694288304 x^6 y^6 - 1467166532832 x^7 y^6 + 523017699204 x^8 y^6 - \\
 & \frac{311320059050 x^9 y^6}{3} + 12882209340 x^{10} y^6 - \frac{5309031728 x^{11} y^6}{5} + \frac{299703404 x^{12} y^6}{5} - \\
 & \frac{46931577 x^{13} y^6}{20} + \frac{1015835 x^{14} y^6}{16} - \frac{83657 x^{15} y^6}{72} + \frac{131461 x^{16} y^6}{9600} - \frac{16169 x^{17} y^6}{172800} + \\
 & \frac{437 x^{18} y^6}{1555200} + 916979083020 x^4 y^8 - 1100374899624 x^5 y^8 + 523017699204 x^6 y^8 - \\
 & 133422882450 x^7 y^8 + 20703550725 x^8 y^8 - 2085691036 x^9 y^8 + \frac{706443738 x^{10} y^8}{5} - \\
 & \frac{261475929 x^{11} y^8}{40} + \frac{13205855 x^{12} y^8}{64} - \frac{418285 x^{13} y^8}{96} + \frac{131461 x^{14} y^8}{2240} - \frac{274873 x^{15} y^8}{604800} + \\
 & \frac{7429 x^{16} y^8}{4838400} + 122263877736 x^2 y^{10} - 244527755472 x^3 y^{10} + 174339233068 x^4 y^{10} - \\
 & 62264011810 x^5 y^{10} + 12882209340 x^6 y^{10} - \frac{8342764144 x^7 y^{10}}{5} + \frac{706443738 x^8 y^{10}}{5} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{319581691 x^9 y^{10}}{40} + \frac{29052881 x^{10} y^{10}}{96} - \frac{1087541 x^{11} y^{10}}{144} + \frac{1708993 x^{12} y^{10}}{14400} - \\
& \frac{274873 x^{13} y^{10}}{259200} + \frac{7429 x^{14} y^{10}}{1814400} + 1852482996 y^{12} - 11114897976 x y^{12} + 15849021188 x^2 y^{12} - \\
& \frac{28301823550 x^3 y^{12}}{3} + 2927774850 x^4 y^{12} - \frac{2654515864 x^5 y^{12}}{5} + \frac{299703404 x^6 y^{12}}{5} - \\
& \frac{87158643 x^7 y^{12}}{20} + \frac{13205855 x^8 y^{12}}{64} - \frac{5437705 x^9 y^{12}}{864} + \frac{1708993 x^{10} y^{12}}{14400} - \\
& \frac{3573349 x^{11} y^{12}}{2851200} + \frac{96577 x^{12} y^{12}}{17107200} + 174165068 y^{14} - 311009050 x y^{14} + 193040100 x^2 y^{14} - \\
& 58341008 x^3 y^{14} + 9880332 x^4 y^{14} - \frac{20113533 x^5 y^{14}}{20} + \frac{1015835 x^6 y^{14}}{16} - \frac{59755 x^7 y^{14}}{24} + \\
& \frac{131461 x^8 y^{14}}{2240} - \frac{274873 x^9 y^{14}}{362880} + \frac{7429 x^{10} y^{14}}{1814400} + \frac{3217335 y^{16}}{2} - \frac{7292626 x y^{16}}{5} + \\
& \frac{2470083 x^2 y^{16}}{5} - \frac{6704511 x^3 y^{16}}{80} + \frac{1015835 x^4 y^{16}}{128} - \frac{83657 x^5 y^{16}}{192} + \frac{131461 x^6 y^{16}}{9600} - \\
& \frac{274873 x^7 y^{16}}{1209600} + \frac{7429 x^8 y^{16}}{4838400} + \frac{48433 y^{18}}{15} - \frac{131461 x y^{18}}{80} + \frac{59755 x^2 y^{18}}{192} - \\
& \frac{24605 x^3 y^{18}}{864} + \frac{7733 x^4 y^{18}}{5760} - \frac{16169 x^5 y^{18}}{518400} + \frac{437 x^6 y^{18}}{1555200} + \frac{629 y^{20}}{384} - \frac{259 x y^{20}}{576} + \\
& \frac{407 x^2 y^{20}}{9600} - \frac{851 x^3 y^{20}}{518400} + \frac{23 x^4 y^{20}}{1036800} + \frac{37 y^{22}}{201600} - \frac{851 x y^{22}}{39916800} + \frac{23 x^2 y^{22}}{39916800} + \frac{y^{24}}{479001600} \\
\text{Hyl2512}[x_, y_] := & 22229795952 x^{11} y - 11114897976 x^{12} y + 2438310952 x^{13} y - \\
& 311009050 x^{14} y + 25738680 x^{15} y - \frac{7292626 x^{16} y}{5} + \frac{290598 x^{17} y}{5} - \frac{131461 x^{18} y}{80} + \\
& \frac{3145 x^{19} y}{96} - \frac{259 x^{20} y}{576} + \frac{407 x^{21} y}{100800} - \frac{851 x^{22} y}{39916800} + \frac{x^{23} y}{19958400} + 407546259120 x^9 y^3 - \\
& 244527755472 x^{10} y^3 + 63396084752 x^{11} y^3 - \frac{28301823550 x^{12} y^3}{3} + 900853800 x^{13} y^3 - \\
& 58341008 x^{14} y^3 + \frac{13173776 x^{15} y^3}{5} - \frac{6704511 x^{16} y^3}{80} + \frac{59755 x^{17} y^3}{32} - \\
& \frac{24605 x^{18} y^3}{864} + \frac{407 x^{19} y^3}{1440} - \frac{851 x^{20} y^3}{518400} + \frac{23 x^{21} y^3}{5443200} + 1467166532832 x^7 y^5 - \\
& 1100374899624 x^8 y^5 + 348678466136 x^9 y^5 - 62264011810 x^{10} y^5 + 7026659640 x^{11} y^5 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2654515864 x^{12} y^5}{5} + \frac{138324648 x^{13} y^5}{5} - \frac{20113533 x^{14} y^5}{20} + \frac{203167 x^{15} y^5}{8} - \\
& \frac{83657 x^{16} y^5}{192} + \frac{7733 x^{17} y^5}{1600} - \frac{16169 x^{18} y^5}{518400} + \frac{23 x^{19} y^5}{259200} + 1467166532832 x^5 y^7 - \\
& 1467166532832 x^6 y^7 + 597734513376 x^7 y^7 - 133422882450 x^8 y^7 + 18403156200 x^9 y^7 - \\
& \frac{8342764144 x^{10} y^7}{5} + \frac{513777264 x^{11} y^7}{5} - \frac{87158643 x^{12} y^7}{20} + \frac{1015835 x^{13} y^7}{8} - \\
& \frac{59755 x^{14} y^7}{24} + \frac{131461 x^{15} y^7}{4200} - \frac{274873 x^{16} y^7}{1209600} + \frac{437 x^{17} y^7}{604800} + 407546259120 x^3 y^9 - \\
& 611319388680 x^4 y^9 + 348678466136 x^5 y^9 - \frac{311320059050 x^6 y^9}{3} + 18403156200 x^7 y^9 - \\
& 2085691036 x^8 y^9 + \frac{470962492 x^9 y^9}{3} - \frac{319581691 x^{10} y^9}{40} + \frac{13205855 x^{11} y^9}{48} - \\
& \frac{5437705 x^{12} y^9}{864} + \frac{131461 x^{13} y^9}{1440} - \frac{274873 x^{14} y^9}{362880} + \frac{7429 x^{15} y^9}{2721600} + 22229795952 x y^{11} - \\
& 66689387856 x^2 y^{11} + 63396084752 x^3 y^{11} - 28301823550 x^4 y^{11} + 7026659640 x^5 y^{11} - \\
& \frac{5309031728 x^6 y^{11}}{5} + \frac{513777264 x^7 y^{11}}{5} - \frac{261475929 x^8 y^{11}}{40} + \frac{13205855 x^9 y^{11}}{48} - \\
& \frac{1087541 x^{10} y^{11}}{144} + \frac{155363 x^{11} y^{11}}{1200} - \frac{3573349 x^{12} y^{11}}{2851200} + \frac{7429 x^{13} y^{11}}{1425600} - 854992152 y^{13} + \\
& 2438310952 x y^{13} - 2177063350 x^2 y^{13} + 900853800 x^3 y^{13} - 204193528 x^4 y^{13} + \\
& \frac{138324648 x^5 y^{13}}{5} - \frac{46931577 x^6 y^{13}}{20} + \frac{1015835 x^7 y^{13}}{8} - \frac{418285 x^8 y^{13}}{96} + \\
& \frac{131461 x^9 y^{13}}{1440} - \frac{274873 x^{10} y^{13}}{259200} + \frac{7429 x^{11} y^{13}}{1425600} - \frac{62201810 y^{15}}{3} + 25738680 x y^{15} - \\
& \frac{58341008 x^2 y^{15}}{5} + \frac{13173776 x^3 y^{15}}{5} - \frac{6704511 x^4 y^{15}}{20} + \frac{203167 x^5 y^{15}}{8} - \frac{83657 x^6 y^{15}}{72} + \\
& \frac{131461 x^7 y^{15}}{4200} - \frac{274873 x^8 y^{15}}{604800} + \frac{7429 x^9 y^{15}}{2721600} - \frac{428978 y^{17}}{5} + \frac{290598 x y^{17}}{5} - \\
& \frac{1183149 x^2 y^{17}}{80} + \frac{59755 x^3 y^{17}}{32} - \frac{24605 x^4 y^{17}}{192} + \frac{7733 x^5 y^{17}}{1600} - \frac{16169 x^6 y^{17}}{172800} + \\
& \frac{437 x^7 y^{17}}{604800} - \frac{6919 y^{19}}{80} + \frac{3145 x y^{19}}{96} - \frac{1295 x^2 y^{19}}{288} + \frac{407 x^3 y^{19}}{1440} - \frac{851 x^4 y^{19}}{103680} + \\
& \frac{23 x^5 y^{19}}{259200} - \frac{37 y^{21}}{1728} + \frac{407 x y^{21}}{100800} - \frac{851 x^2 y^{21}}{3628800} + \frac{23 x^3 y^{21}}{5443200} - \frac{37 y^{23}}{39916800} + \frac{x y^{23}}{19958400}
\end{aligned}$$

La partie réelle, la partie imaginaire hyperbolique et la norme de la fonction radiale sont données par

$$\begin{aligned} \text{Reu2512}[x_, y_, x_, y_] &:= \text{Sqrt}[u0n1[25, 12]] \text{Exp}\left[-\frac{x}{2}\right] \\ &\left(\left(x\text{fp}[x_, y_] \cosh\left[\frac{y}{2}\right] - y\text{fp}[x_, y_] \sinh\left[\frac{y}{2}\right] \right) \text{Rel2512}[x, y] + \right. \\ &\quad \left. \left(y\text{fp}[x_, y_] \cosh\left[\frac{y}{2}\right] - x\text{fp}[x_, y_] \sinh\left[\frac{y}{2}\right] \right) \text{Hy12512}[x, y] \right) \\ \text{Hyu2512}[x_, y_, x_, y_] &:= \text{Sqrt}[u0n1[25, 12]] \text{Exp}\left[-\frac{x}{2}\right] \\ &\left(\left(x\text{fp}[x_, y_] \cosh\left[\frac{y}{2}\right] - y\text{fp}[x_, y_] \sinh\left[\frac{y}{2}\right] \right) \text{Hy12512}[x, y] + \right. \\ &\quad \left. \left(y\text{fp}[x_, y_] \cosh\left[\frac{y}{2}\right] - x\text{fp}[x_, y_] \sinh\left[\frac{y}{2}\right] \right) \text{Rel2512}[x, y] \right) \\ \text{Nu2512}[x_, y_, x_, y_] &:= \text{Sqrt}\left[\text{Reu2512}[x_, y_, x_, y_]^2 + \text{Hyu2512}[x_, y_, x_, y_]^2\right] \end{aligned}$$

En traçant ces fonctions, on obtient les mêmes résultats qu'avec le programme 2.

```
Phy3DReu2512 = Plot3D[a03/2 Reu2512[1, 0, x, y], {x, 0, 20},
  {y, -4, 4}, ImageSize → 450, Mesh → 50, MeshStyle → Automatic,
  ColorFunctionScaling → True, ColorFunction → Function[{x, y, z}, Hue[z]],
  BoundaryStyle → Directive[Blue, Thickness[0.006]], PlotStyle → Opacity[1],
  Axes → True, AxesEdge -> {Automatic, Automatic, {1, 1}}, AxesStyle -> Thickness[0.007],
  Boxed → False, PlotRange → Automatic, AspectRatio → 1, MaxRecursion → 5,
  PlotPoints → 60, Ticks → {Automatic, Automatic, {{0, "0"}, {2*10-4, "2×10-4"}}},
  TicksStyle → Directive[50], AxesLabel -> {Text[Style["xf", Blue, 55]],
  Text[Style["yf", Blue, 55]] (*, Text[Style["a03/2 Reun1", Blue, 55]] *)}
I9 = ImageCrop[Rasterize[Phy3DReu2512, ImageSize → 800, ImageResolution → 300]];
Export["Phy3DReu2512.png", I9];

Phy3DHyu2512 = Plot3D[a03/2 Hyu2512[1, 0, x, y], {x, 0, 20},
  {y, -4, 4}, ImageSize → 450, Mesh → 50, MeshStyle → Automatic,
  ColorFunctionScaling → True, ColorFunction → Function[{x, y, z}, Hue[z]],
  BoundaryStyle → Directive[Blue, Thickness[0.006]], PlotStyle → Opacity[1],
  Axes → True, AxesEdge -> {Automatic, Automatic, {1, 1}},
  AxesStyle -> Thickness[0.007], Boxed → False, PlotRange → Automatic,
  AspectRatio → 1, MaxRecursion → 5, PlotPoints → 60,
  Ticks → {Automatic, Automatic, {{-2*10-4, "-2×10-4"}, {0, "0"}, {2*10-4, "2×10-4"}}},
  TicksStyle → Directive[50], AxesLabel -> {Text[Style["xf", Blue, 55]],
  Text[Style["yf", Blue, 55]] (*, Text[Style["a03/2 Hyun1", Blue, 55]] *)}
I10 = ImageCrop[Rasterize[Phy3DHyu2512, ImageSize → 800, ImageResolution → 300]];
Export["Phy3DHyu2512.png", I10];
```

```
Phy3DNu2512 = Plot3D[a03 Nu2512[1, 0, x, y]2, {x, 0, 20},
  {y, -4, 4}, ImageSize → 450, Mesh → 50, MeshStyle → Automatic,
  ColorFunctionScaling → True, ColorFunction → Function[{x, y, z}, Hue[z]],
  BoundaryStyle → Directive[Blue, Thickness[0.006]], PlotStyle → Opacity[1],
  Axes → True, AxesEdge → {Automatic, Automatic, {1, 1}},
  AxesStyle → Thickness[0.007], Boxed → False, PlotRange → Automatic,
  AspectRatio → 1, MaxRecursion → 5, PlotPoints → 60, Ticks → {Automatic,
    Automatic, {{2 * 10-8, "2×10-8"}, {4 * 10-8, "4×10-8"}, {6 * 10-8, "6×10-8"}}},
  TicksStyle → Directive[50], AxesLabel → {Text[Style["xξ", Blue, 55]],
    Text[Style["yξ", Blue, 55]] (*, Text[Style["a03 Nunl2", Blue, 55]] *)}]
I11 = ImageCrop[Rasterize[Phy3DNu2512, ImageSize → 800, ImageResolution → 300]];
Export["Phy3DNu2512.png", I11];
```

En regardant la coupe $y_{\xi}=0$, on obtient les mêmes résultats qu'avec le programme 1.

```
Phy2DReu2512 =
Plot[a03/2 Reu2512[1, 0, x, 0], {x, 0, 20}, PlotRange → Automatic, ImageSize → 450,
  PlotStyle → Directive[Thickness[0.006]], PlotPoints → 50, MaxRecursion → 5,
  AxesStyle → Thickness[0.007], Ticks → Automatic, TicksStyle → Directive[20],
  AxesLabel → {Text[Style["ξ", Blue, 24]], Text[Style["a03/2 Reunl", Blue, 24]]}]
```

```
Phy2DHyu2512 =
Plot[a03/2 Hyu2512[1, 0, x, 0], {x, 0, 20}, PlotRange → Automatic, ImageSize → 450,
  PlotStyle → Directive[Thickness[0.006]], PlotPoints → 50, MaxRecursion → 5,
  AxesStyle → Thickness[0.007], Ticks → Automatic, TicksStyle → Directive[20],
  AxesLabel → {Text[Style["ξ", Blue, 24]], Text[Style["a03/2 Hyunl", Blue, 24]]}]
```

```
Phy2DNu2512 =
Plot[a03 Nu2512[1, 0, x, 0]2, {x, 0, 20}, PlotRange → Automatic, ImageSize → 450,
  PlotStyle → Directive[Thickness[0.006]], PlotPoints → 50, MaxRecursion → 5,
  AxesStyle → Thickness[0.007], Ticks → Automatic, TicksStyle → Directive[20],
  AxesLabel → {Text[Style["ξ", Blue, 24]], Text[Style["a03 Nunl2", Blue, 24]]}]
```

B Quelques preuves

Dans cet appendice, nous présenterons d'abord quelques résultats intéressants impliquant le symbole de Levi-Civita. Ensuite, en utilisant ceux-ci, nous ferons la preuve en détail que les opérateurs bicomplexes H , L_i et A_j satisfont aux relations (21) à (25) de l'article [36] avec l'indice s supprimé. La preuve donnée dans l'article, qui se base sur des résultats bien connus en mécanique quantique, est complète, mais nous voulons ici travailler directement avec les opérateurs bicomplexes.

B.1 Le symbole de Levi-Civita

Le symbole de Levi-Civita est défini comme [24]

$$\epsilon_{ijk} := \begin{cases} +1, & \text{si } (ijk) \text{ est une permutation paire de } (123) \\ -1, & \text{si } (ijk) \text{ est une permutation impaire de } (123) . \\ 0, & \text{autrement} \end{cases} \quad (\text{B1})$$

C'est une fonction du triplet (ijk) qui, par définition, est antisymétrique par rapport à toute permutation de deux indices, c'est-à-dire,

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = \epsilon_{jki} = -\epsilon_{kji} = \epsilon_{kij} = -\epsilon_{ikj}. \quad (\text{B2})$$

Avec la définition et cette dernière propriété, on montre facilement que pour tout opérateur linéaire A_i , B_j et C_k , avec $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$,

$$\sum_{bc} \epsilon_{abc} (A_b B_c + A_c B_b) = 0, \quad (\text{B3})$$

$$\sum_{bc} \epsilon_{abc} (A_b B_c - A_c B_b) = 2 \sum_{bc} \epsilon_{abc} A_b B_c = -2 \sum_{bc} \epsilon_{abc} A_c B_b, \quad (\text{B4})$$

où il est sous-entendu que les sommes s'effectuent de 1 à 3.

Il existe une relation remarquable entre la somme sur un indice commun du produit de deux symboles de Levi-Civita et la différence des produits de deux delta de Kronecker dont les indices ne contiennent pas l'indice sommé. Ce théorème rend possible les calculs de commutateur compliqués impliquant ce symbole. En particulier, celui-ci sera la clé ultime de la preuve des équations (21) à (25) que nous allons développer à la section suivante. Il s'écrit symboliquement

$$\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}. \quad (\text{B6})$$

Preuve.

Puisque i, j, l, m peuvent respectivement prendre 3 valeurs chacun et k est un indice muet, la relation (B6) représente en fait $3^4 = 81$ cas possibles, un pour chaque quadruplet $ijklm$. Effectuons une preuve exhaustive de tous les cas,

1. Si on impose la contrainte $i = j$, on vérifie les $3^3 = 27$ cas

$$\sum_{k=1}^3 \epsilon_{jjk} \epsilon_{lmk} = \delta_{jl} \delta_{jm} - \delta_{jm} \delta_{jl} \quad \Rightarrow \quad 0 = 0.$$

2. Si $i \neq j$ et $l = m$, on a également les 24 cas suivant

$$\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{mmk} = \delta_{im} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jm} \quad \Rightarrow \quad 0 = 0.$$

3. Si $i \neq j$, $l \neq m$,

(a) $i = l$, il faut vérifier l'équation

$$\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ljk} \epsilon_{lmk} = \delta_{jm} - \delta_{lm} \delta_{jl}$$

6 fois, une pour chaque quadruplet $ljlm$ qui respecte $l \neq j$, $l \neq m$ et $j \neq m$.

C'est dire que pour tout

$$ljlm \in \{1213, 1312, 2123, 2321, 3132, 3231\},$$

$$\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ljk} \epsilon_{lmk} = \delta_{jm} - \delta_{lm} \delta_{jl} \quad \Rightarrow \quad 0 = 0.$$

(b) $i = m$, il faut vérifier l'équation

$$\sum_{k=1}^3 \epsilon_{mjk} \epsilon_{lmk} = \delta_{ml} \delta_{jm} - \delta_{jl}$$

6 fois, une pour chaque quadruplet $mjlm$ qui respecte $m \neq j$, $m \neq l$ et $j \neq l$. C'est dire que pour tout

$$mjlm \in \{1231, 1321, 2132, 2312, 3123, 3213\},$$

$$\sum_{k=1}^3 \epsilon_{mjk} \epsilon_{lmk} = \delta_{ml} \delta_{jm} - \delta_{jl} \quad \Rightarrow \quad 0 = 0.$$

(c) $j = m$, il faut vérifier l'équation

$$\sum_{k=1}^3 \epsilon_{imk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il} - \delta_{im} \delta_{ml}$$

6 fois, une pour chaque quadruplet $imlm$ qui respecte $m \neq i$, $m \neq l$ et

$i \neq l$. C'est dire que pour tout

$$imlm \in \{2131, 3121, 1232, 3212, 1323, 2313\},$$

$$\sum_{k=1}^3 \epsilon_{imk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il} - \delta_{im} \delta_{ml} \quad \Rightarrow \quad 0 = 0.$$

(d) $j = l$, il faut vérifier l'équation

$$\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ilk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{lm} - \delta_{im}$$

6 fois, une pour chaque quadruplet $illm$ qui respecte $l \neq i$, $l \neq m$ et $i \neq m$.

C'est dire que pour tout

$$illm \in \{2113, 3112, 1223, 3221, 1332, 2331\},$$

$$\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ilk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{lm} - \delta_{im} \quad \Rightarrow \quad 0 = 0.$$

(e) $i = l$ et $j = m$, il faut vérifier l'équation

$$\epsilon_{lm1} \epsilon_{lm1} + \epsilon_{lm2} \epsilon_{lm2} + \epsilon_{lm3} \epsilon_{lm3} = 1$$

6 fois, une pour chaque quadruplet $lmlm$ qui respecte $i \neq j$, $l \neq m$, $i = l$

et $j = m$. C'est dire que pour tout

$$lmlm \in \{2323, 3232, 1313, 3131, 1212, 2121\},$$

$$\sum_{k=1}^3 \epsilon_{lmk} \epsilon_{lmk} = \delta_{ll} \delta_{mm} - \delta_{lm} \delta_{ml} \quad \Rightarrow \quad 1 = 1.$$

(f) $i = m$ et $j = l$, il faut vérifier l'équation

$$\epsilon_{ml1}\epsilon_{lm1} + \epsilon_{ml2}\epsilon_{lm2} + \epsilon_{ml3}\epsilon_{lm3} = -1$$

6 fois, une pour chaque quadruplet $mllm$ qui respecte $i \neq j$, $l \neq m$, $i = m$ et $j = l$. C'est dire que pour tout

$$mllm \in \{2332, 3223, 1331, 3113, 1221, 2112\},$$

$$\sum_{k=1}^3 \epsilon_{mlk}\epsilon_{lmk} = \delta_{ml}\delta_{lm} - \delta_{mm}\delta_{ll} \quad \Rightarrow \quad -1 = -1.$$

Notons que l'antisymétrie du symbole de Levi-Civita induit trois redondances dans chacun des cas (e) et (f). On a ainsi trouvé les 75 identités $0 = 0$, les 3 identités $1 = 1$ et les 3 identités $-1 = -1$ associées à l'équation (B6). \square

B.2 Certains commutateurs

Avec le symbole de Levi-Civita, l'identité (B6) et les propriétés des commutateurs, on peut calculer les relations de commutation des composantes du moment cinétique \mathbf{L} d'un seul coup

$$\begin{aligned} [L_i, L_j] &= \left[\sum_{k\ell} \epsilon_{ik\ell} X_k P_\ell, \sum_{mn} \epsilon_{jmn} X_m P_n \right] \\ &= \sum_{k\ell mn} \epsilon_{ik\ell} \epsilon_{jmn} \{X_k P_\ell X_m P_n - X_m P_n X_k P_\ell\} \\ &= \sum_{k\ell mn} \epsilon_{ik\ell} \epsilon_{jmn} \{X_k (X_m P_\ell - \mathbf{i}_1 \hbar \delta_{m\ell} \xi I) P_n - X_m (X_k P_n - \mathbf{i}_1 \hbar \delta_{kn} \xi I) P_\ell\} \\ &= \mathbf{i}_1 \eta \sum_{k\ell mn} \epsilon_{ik\ell} \epsilon_{jmn} \delta_{kn} X_m P_\ell - \mathbf{i}_1 \eta \sum_{k\ell mn} \epsilon_{ik\ell} \epsilon_{jmn} \delta_{m\ell} X_k P_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{i}_1 \eta \left\{ \sum_{\ell m} \left(\sum_k \epsilon_{ik\ell} \epsilon_{jmk} \right) X_m P_\ell - \sum_{kn} \left(\sum_\ell \epsilon_{ik\ell} \epsilon_{j\ell n} \right) X_k P_n \right\} \\
&= \mathbf{i}_1 \eta \left\{ \sum_{\ell m} (\delta_{\ell j} \delta_{im} - \delta_{\ell m} \delta_{ij}) X_m P_\ell - \sum_{kn} (\delta_{in} \delta_{kj} - \delta_{ij} \delta_{kn}) X_k P_n \right\} \\
&= \mathbf{i}_1 \eta \left\{ \sum_{\ell m} \delta_{\ell j} \delta_{im} X_m P_\ell - \sum_{\ell m} \delta_{\ell m} \delta_{ij} X_m P_\ell - \sum_{kn} \delta_{in} \delta_{kj} X_k P_n + \sum_{kn} \delta_{ij} \delta_{kn} X_k P_n \right\} \\
&= \mathbf{i}_1 \eta \left\{ \sum_{\ell m} \delta_{\ell j} \delta_{im} [X_m P_\ell - X_\ell P_m] - \delta_{ij} \sum_{\ell m} \delta_{\ell m} [X_m P_\ell - X_m P_\ell] \right\} \\
&= \mathbf{i}_1 \eta \{X_i P_j - X_j P_i\} = \mathbf{i}_1 \eta \left\{ \sum_{ab} \delta_{ia} \delta_{jb} X_a P_b - \sum_{ab} \delta_{ib} \delta_{ja} X_a P_b \right\} \\
&= \mathbf{i}_1 \eta \sum_{ab} (\delta_{ia} \delta_{jb} - \delta_{ib} \delta_{ja}) X_a P_b = \mathbf{i}_1 \eta \sum_{ab} \left(\sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{abk} \right) X_a P_b \\
&= \mathbf{i}_1 \eta \sum_k \epsilon_{ijk} L_k. \tag{B7}
\end{aligned}$$

Les relations de commutation du moment cinétique \mathbf{L} avec l'opérateur position \mathbf{R} et impulsion \mathbf{P} s'évaluent de la façon suivante

$$\begin{aligned}
[L_i, X_j] &= \left[\sum_{k\ell} \epsilon_{ik\ell} X_k P_\ell, X_j \right] = \sum_{k\ell} \epsilon_{ik\ell} [X_k P_\ell, X_j] \\
&= \sum_{k\ell} \epsilon_{ik\ell} \{X_k [P_\ell, X_j] + [X_k, X_j] P_\ell\} = - \sum_{k\ell} \epsilon_{ik\ell} X_k [X_j, P_\ell] \\
&= - \sum_{k\ell} \epsilon_{ik\ell} X_k \{\mathbf{i}_1 \hbar \delta_{j\ell} \xi I\} = \mathbf{i}_1 \eta \sum_k \epsilon_{ijk} X_k, \tag{B8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_i, P_j] &= \left[\sum_{ak} \epsilon_{iak} X_a P_k, P_j \right] = \sum_{ak} \epsilon_{iak} [X_a P_k, P_j] \\
&= \sum_{ak} \epsilon_{iak} \{X_a [P_k, P_j] + [X_a, P_j] P_k\} = \sum_{ak} \epsilon_{iak} [X_a, P_j] P_k \\
&= \sum_{ak} \epsilon_{iak} \{\mathbf{i}_1 \hbar \delta_{aj} \xi I\} P_k = \mathbf{i}_1 \eta \sum_k \epsilon_{ijk} P_k. \tag{B9}
\end{aligned}$$

On obtient également, en utilisant (B8) et l'antisymétrie de ϵ_{ijk} , que

$$\begin{aligned}
 [L_i, R^2] &= \left[L_i, \sum_a X_a X_a \right] = \sum_a [L_i, X_a X_a] = \sum_a \{X_a [L_i, X_a] + [L_i, X_a] X_a\} \\
 &= \sum_a \left(X_a \left\{ \mathbf{i}_1 \eta \sum_b \epsilon_{iab} X_b \right\} + \left\{ \mathbf{i}_1 \eta \sum_b \epsilon_{iab} X_b \right\} X_a \right) \\
 &= \mathbf{i}_1 \eta \sum_{ab} \epsilon_{iab} (X_a X_b + X_b X_a) = 0
 \end{aligned} \tag{B10}$$

Similairement, en utilisant (B9) et l'antisymétrie de ϵ_{ijk} , on a que

$$\begin{aligned}
 [L_i, P^2] &= \left[L_i, \sum_a P_a P_a \right] = \sum_a [L_i, P_a P_a] = \sum_a \{P_a [L_i, P_a] + [L_i, P_a] P_a\} \\
 &= \sum_a \left(P_a \left\{ \mathbf{i}_1 \eta \sum_b \epsilon_{iab} P_b \right\} + \left\{ \mathbf{i}_1 \eta \sum_b \epsilon_{iab} P_b \right\} P_a \right) \\
 &= \mathbf{i}_1 \eta \sum_{ab} \epsilon_{iab} (P_a P_b + P_b P_a) = 0
 \end{aligned} \tag{B11}$$

Puisque les L_i commute avec R^2 et P^2 , ils commutent avec toutes fonctions $f(R)$ et $g(P)$ si on définit celles-ci en séries de puissances entières avec coefficients bicomplexes. Les résultats (B10) et (B11) impliquent directement que $\{H, L_i, L^2\}$ forment un ensemble d'opérateurs commutants pour tout hamiltonien avec potentiel central. En effet,

$$\begin{aligned}
 [L^2, L_i] &= \left[\sum_k L_k^2, L_i \right] = \sum_k [L_k L_k, L_i] = \sum_k \{L_k [L_k, L_i] + [L_k, L_i] L_k\} \\
 &= \sum_k \left(L_k \left\{ \mathbf{i}_1 \eta \sum_a \epsilon_{kia} L_a \right\} + \left\{ \mathbf{i}_1 \eta \sum_a \epsilon_{kia} L_a \right\} L_k \right) \\
 &= \mathbf{i}_1 \eta \sum_{ak} \epsilon_{iak} \{L_k L_a + L_a L_k\} = 0,
 \end{aligned} \tag{B12}$$

$$[H, L_i] = \left[\frac{1}{2\mu} P^2 + V(R), L_i \right] = \frac{1}{2\mu} [P^2, L_i] + [V(R), L_i] = 0, \tag{B13}$$

$$[H, L^2] = \left[H, \sum_i L_i^2 \right] = \sum_i [H, L_i L_i] = \sum_i \{L_i [H, L_i] + [H, L_i] L_i\} = 0. \tag{B14}$$

En général, on utilise le fait que ces opérateurs ont des fonctions propres communes et on cherche celles-ci afin d'obtenir la fonction d'onde des ions hydrogénoïdes [24, 23].

B.3 Preuves de (21) à (25)

Nous allons faire la démonstration des relations (21) à (25) de [36] avec l'indice s supprimé en nous basant sur le développement de [62, 63]. Pour ce faire, nous allons utiliser la représentation des coordonnées introduite en (39) à (41). Bien qu'elles soient très calculatoires, ces démonstrations sont directes et ne présentent aucun problème conceptuel.

Établissons tout d'abord quelques résultats qui nous seront utiles, en commençant par certaines propriétés des commutateurs. Si deux opérateurs linéaires A et B commutent respectivement avec leur commutateur, *i.e.*

$$[A, [A, B]] = 0 \quad \text{et} \quad [B, [A, B]] = 0,$$

alors

$$[A^n, B] = nA^{n-1}[A, B] \quad \text{et} \quad [A, B^n] = nB^{n-1}[A, B].$$

Pour $n = 2$, nous avons

$$\begin{aligned} [A^2, B] &= AAB - BAA = ABA - BAA + AAB - ABA \\ &= [A, B]A + A[A, B] = A[A, B] + A[A, B] = 2A[A, B], \\ [A, B^2] &= ABB - BBA = BAB - BBA + ABB - BAB \\ &= B[A, B] + [A, B]B = B[A, B] + B[A, B] = 2B[A, B]. \end{aligned}$$

On prend

$$[A^{k-1}, B] = (k-1) A^{n-2} [A, B] \quad \text{et} \quad [A, B^{k-1}] = (k-1) B^{n-2} [A, B]$$

comme hypothèse d'induction et on vérifie que

$$\begin{aligned} [A^k, B] &= [AA^{k-1}, B] = A [A^{k-1}, B] + [A, B] A^{k-1} \\ &= A (k-1) A^{n-2} [A, B] + [A, B] A^{k-1} \\ &= (k-1) A^{k-1} [A, B] + A^{k-1} [A, B] \\ &= k A^{k-1} [A, B]. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} [A, B^k] &= [A, BB^{k-1}] = B [A, B^{k-1}] + [A, B] B^{k-1} \\ &= B (k-1) B^{n-2} [A, B] + [A, B] B^{k-1} \\ &= (k-1) B^{k-1} [A, B] + B^{k-1} [A, B] \\ &= k B^{k-1} [A, B]. \end{aligned}$$

En vertu de la définition (40) et (41), on a maintenant

$$\begin{aligned} [P_i, f(\mathbf{R})] \psi(\mathbf{r}) &= -\mathbf{i}_1 \eta \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} [f(\mathbf{R}) \psi(\mathbf{r})] - f(\mathbf{R}) \frac{\partial}{\partial x_i} \psi(\mathbf{r}) \right\} \\ &= -\mathbf{i}_1 \eta \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) + f(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial x_i} \psi(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial x_i} \psi(\mathbf{r}) \right\} \\ &= -\mathbf{i}_1 \eta \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Ceci veut dire que

$$[P_i, f(\mathbf{R})] = -\mathbf{i}_1 \eta \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{r}).$$

On a également,

$$\begin{aligned} [X_i, f(\mathbf{P})] &= \left[X_i, \sum_{abc} t_{abc} P_i^a P_j^b P_k^c \right] = \sum_{abc} t_{abc} [X_i, P_i^a P_j^b P_k^c] \\ &= \sum_{abc} t_{abc} \{ P_i^a P_j^b [X_i, P_k^c] + P_i^a [X_i, P_j^b] P_k^c + [X_i, P_i^a] P_j^b P_k^c \} \end{aligned}$$

Puisque $[X_i, P_d] = \mathbf{i}_1 \eta \delta_{id} I$, tous les P_e commutent avec $[X_i, P_d]$, et ceci implique

$$[X_i, f(\mathbf{P})] = \mathbf{i}_1 \eta \sum_{abc} t_{abc} \{ a P_i^{a-1} \} P_j^b P_k^c = \mathbf{i}_1 \eta \frac{\partial}{\partial P_i} f(\mathbf{P}).$$

Pour démontrer la relation (21), on commence par montrer, comme nous l'avons déjà mentionné, que l'hamiltonien des ions hydrogéoïdes H , donné par (11), commute avec L_i . En effet, en utilisant la notation ∂_ℓ pour désigner la dérivée partielle par rapport à x_ℓ ,

$$\begin{aligned} [H, L_i] &= \left[\frac{1}{2\mu} \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} - \frac{Ze^2}{R}, L_i \right] = \frac{1}{2\mu} \underbrace{[\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}, L_i]}_0 - Ze^2 [R^{-1}, L_i] \\ &= -Ze^2 \left[R^{-1}, \sum_{ab} \epsilon_{iab} X_a P_b \right] = -Ze^2 \sum_{ab} \epsilon_{iab} [R^{-1}, X_a P_b] \\ &= -Ze^2 \sum_{ab} \epsilon_{iab} \left\{ X_a [R^{-1}, P_b] + \underbrace{[R^{-1}, X_a]}_0 P_b \right\} \\ &= Ze^2 \sum_{ab} \epsilon_{iab} X_a [P_b, R^{-1}] = Ze^2 \sum_{ab} \epsilon_{iab} X_a (-\mathbf{i}_1 \eta \partial_b R^{-1}) \\ &= -\mathbf{i}_1 \eta Ze^2 \sum_{ab} \epsilon_{iab} X_a \left\{ -\frac{1}{R^2} \frac{1}{2R} 2X_b \right\} = \frac{\mathbf{i}_1 \eta Ze^2}{R^3} \sum_{ab} \epsilon_{iab} X_a X_b \\ &= \frac{\mathbf{i}_1 \eta Ze^2}{2R^3} \sum_{ab} \epsilon_{iab} (X_a X_b - X_b X_a) = 0. \end{aligned}$$

On calcule maintenant la relation de commutation suivante dont nous aurons besoin

pour poursuivre :

$$\begin{aligned} \left[\frac{X_i}{R}, \sum_{\ell} P_{\ell}^2 \right] &= \sum_{\ell} \left[\frac{X_i}{R}, P_{\ell}^2 \right] = \sum_{\ell} \left[\frac{X_i}{R}, (-\mathbf{i}_1 \eta \partial_{\ell})^2 \right] = -\eta^2 \sum_{\ell} \left[\frac{X_i}{R}, \partial_{\ell}^2 \right] \\ &= -\eta^2 \sum_{\ell} \left(\frac{X_i}{R} \partial_{\ell}^2 - \partial_{\ell}^2 \frac{X_i}{R} \right) = -\eta^2 \left(\frac{X_i}{R} \sum_{\ell} \partial_{\ell}^2 - \sum_{\ell} \partial_{\ell}^2 \frac{X_i}{R} \right). \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} \sum_{\ell} \partial_{\ell}^2 \frac{X_i}{R} &= \sum_{\ell} \partial_{\ell} \left\{ \partial_{\ell} \frac{X_i}{R} \right\} = \sum_{\ell} \partial_{\ell} \left\{ \left(\partial_{\ell} \frac{X_i}{R} \right) + \frac{X_i}{R} \partial_{\ell} \right\} \\ &= \sum_{\ell} \partial_{\ell} \left\{ \frac{\partial_{\ell} X_i}{R} + X_i \left(\partial_{\ell} \frac{1}{R} \right) + \frac{X_i}{R} \partial_{\ell} \right\} \\ &= \sum_{\ell} \partial_{\ell} \left\{ \frac{\delta_{i\ell}}{R} - \frac{X_i X_{\ell}}{R^3} + \frac{X_i}{R} \partial_{\ell} \right\} \\ &= \sum_{\ell} \left\{ \partial_{\ell} \frac{\delta_{i\ell}}{R} - \partial_{\ell} \frac{X_i X_{\ell}}{R^3} + \partial_{\ell} \frac{X_i}{R} \partial_{\ell} \right\} \\ &= \sum_{\ell} \left\{ \left(\partial_{\ell} \frac{\delta_{i\ell}}{R} \right) + \frac{\delta_{i\ell}}{R} \partial_{\ell} - \left(\partial_{\ell} \frac{X_i X_{\ell}}{R^3} \right) - \frac{X_i X_{\ell}}{R^3} \partial_{\ell} + \left(\partial_{\ell} \frac{X_i}{R} \partial_{\ell} \right) + \frac{X_i}{R} \partial_{\ell}^2 \right\} \\ &= \sum_{\ell} \left\{ -\delta_{i\ell} \frac{X_{\ell}}{R^3} + \frac{\delta_{i\ell}}{R} \partial_{\ell} - \delta_{i\ell} \frac{X_{\ell}}{R^3} - \frac{X_i}{R^3} + 3 \frac{X_i X_{\ell}^2}{R^5} \right. \\ &\quad \left. - \frac{X_i X_{\ell}}{R^3} \partial_{\ell} + \frac{\delta_{i\ell}}{R} \partial_{\ell} - \frac{X_i X_{\ell}}{R^3} \partial_{\ell} + \frac{X_i}{R} \partial_{\ell}^2 \right\} \\ &= \sum_{\ell} \left\{ -2\delta_{i\ell} \frac{X_{\ell}}{R^3} + 2 \frac{\delta_{i\ell}}{R} \partial_{\ell} - \frac{X_i}{R^3} + 3 \frac{X_i X_{\ell}^2}{R^5} - 2 \frac{X_i X_{\ell}}{R^3} \partial_{\ell} + \frac{X_i}{R} \partial_{\ell}^2 \right\} \\ &= -2 \frac{X_i}{R^3} + 2 \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x_i} - 2 \frac{X_i}{R^3} \sum_{\ell} X_{\ell} \partial_{\ell} + \sum_{\ell} \left\{ 3 \frac{X_i X_{\ell}^2}{R^5} - \frac{X_i}{R^3} \right\} + \frac{X_i}{R} \sum_{\ell} \partial_{\ell}^2 \\ &= -2 \frac{X_i}{R^3} + 2 \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x_i} - 2 \frac{X_i}{R^3} \sum_{\ell} X_{\ell} \partial_{\ell} + \frac{X_i}{R} \sum_{\ell} \partial_{\ell}^2, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\left[\frac{X_i}{R}, \sum_{\ell} P_{\ell}^2 \right] &= -\eta^2 \left(\frac{X_i}{R} \sum_{\ell} \partial_{\ell}^2 - \sum_{\ell} \partial_{\ell}^2 \frac{X_i}{R} \right) \\
&= -\eta^2 \left(\frac{X_i}{R} \sum_{\ell} \partial_{\ell}^2 - \left[-2 \frac{X_i}{R^3} + 2 \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x_i} - 2 \frac{X_i}{R^3} \sum_{\ell} X_{\ell} \partial_{\ell} + \frac{X_i}{R} \sum_{\ell} \partial_{\ell}^2 \right] \right) \\
&= 2\eta^2 \left(-\frac{X_i}{R^3} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{X_i}{R^3} \sum_{\ell} X_{\ell} \partial_{\ell} \right).
\end{aligned}$$

Pour le commutateur de A_i avec H ,

$$\begin{aligned}
[A_i, H] &= \left[\frac{1}{\mu} \left(\sum_{jk} \epsilon_{ijk} P_j L_k - \mathbf{i}_1 \eta P_i \right) - Ze^2 \frac{X_i}{R}, H \right] \\
&= \frac{1}{\mu} \left[\sum_{jk} \epsilon_{ijk} P_j L_k - \mathbf{i}_1 \eta P_i, H \right] - Ze^2 \left[\frac{X_i}{R}, H \right].
\end{aligned}$$

Toutefois,

$$\begin{aligned}
\left[\frac{X_i}{R}, H \right] &= \left[\frac{X_i}{R}, \frac{1}{2\mu} \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} - \frac{Ze^2}{R} \right] = \frac{1}{2\mu} \left[\frac{X_i}{R}, \sum_{\ell} P_{\ell} P_{\ell} \right] - Ze^2 \underbrace{\left[\frac{X_i}{R}, \frac{1}{R} \right]}_0 \\
&= \frac{1}{2\mu} \left[\frac{X_i}{R}, \sum_{\ell} P_{\ell}^2 \right] = \frac{\eta^2}{\mu} \left(-\frac{X_i}{R^3} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{X_i}{R^3} \sum_{\ell} X_{\ell} \partial_{\ell} \right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\left[\sum_{jk} \epsilon_{ijk} P_j L_k - \mathbf{i}_1 \eta P_i, H \right] &= \sum_{jk} \epsilon_{ijk} [P_j L_k, H] - \mathbf{i}_1 \eta [P_i, H] \\
&= \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \{ P_j [L_k, H] + [P_j, H] L_k \} - \mathbf{i}_1 \eta [P_i, H] \\
&= \sum_{jk} \epsilon_{ijk} [P_j, H] L_k - \mathbf{i}_1 \eta [P_i, H] \\
&= \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \left[P_j, \frac{1}{2\mu} \sum_{\ell} P_{\ell}^2 - \frac{Ze^2}{R} \right] L_k - \mathbf{i}_1 \eta \left[P_i, \frac{1}{2\mu} \sum_{\ell} P_{\ell}^2 - \frac{Ze^2}{R} \right] \\
&= \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \left[P_j, -\frac{Ze^2}{R} \right] L_k - \mathbf{i}_1 \eta \left[P_i, -\frac{Ze^2}{R} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -Ze^2 \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \left[P_j, \frac{1}{R} \right] L_k + \mathbf{i}_1 \eta Ze^2 \left[P_i, \frac{1}{R} \right] \\
&= -\mathbf{i}_1 \eta Ze^2 \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \frac{X_j}{R^3} L_k + (\mathbf{i}_1 \eta)^2 Ze^2 \frac{X_i}{R^3} \\
&= -\mathbf{i}_1 \eta Ze^2 \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \frac{X_j}{R^3} \sum_{ab} \epsilon_{kab} X_a P_b + (\mathbf{i}_1 \eta)^2 Ze^2 \frac{X_i}{R^3} \\
&= -\mathbf{i}_1 \eta Ze^2 \sum_{jab} \sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{abk} \frac{X_j}{R^3} X_a P_b + (\mathbf{i}_1 \eta)^2 Ze^2 \frac{X_i}{R^3} \\
&= -\mathbf{i}_1 \eta Ze^2 \sum_{jab} (\delta_{ia} \delta_{jb} - \delta_{ib} \delta_{ja}) \frac{X_j}{R^3} X_a P_b + (\mathbf{i}_1 \eta)^2 Ze^2 \frac{X_i}{R^3} \\
&= -\mathbf{i}_1 \eta Ze^2 \sum_{jab} \delta_{ia} \delta_{jb} \frac{X_j}{R^3} X_a P_b + \mathbf{i}_1 \eta Ze^2 \sum_{jab} \delta_{ib} \delta_{ja} \frac{X_j}{R^3} X_a P_b + (\mathbf{i}_1 \eta)^2 Ze^2 \frac{X_i}{R^3} \\
&= -\mathbf{i}_1 \eta Ze^2 \sum_j \frac{X_j}{R^3} X_i P_j + \mathbf{i}_1 \eta Ze^2 \sum_j \frac{X_j}{R^3} X_j P_i + (\mathbf{i}_1 \eta)^2 Ze^2 \frac{X_i}{R^3} \\
&= -\mathbf{i}_1 \eta Ze^2 \frac{X_i}{R^3} \sum_j X_j P_j + \mathbf{i}_1 \eta Ze^2 \frac{1}{R} P_i + (\mathbf{i}_1 \eta)^2 Ze^2 \frac{X_i}{R^3} \\
&= -\mathbf{i}_1 \eta Ze^2 \frac{X_i}{R^3} \sum_j X_j (-\mathbf{i}_1 \eta \partial_j) + \mathbf{i}_1 \eta Ze^2 \frac{1}{R} \left(-\mathbf{i}_1 \eta \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + (\mathbf{i}_1 \eta)^2 Ze^2 \frac{X_i}{R^3} \\
&= \eta^2 Ze^2 \left\{ -\frac{X_i}{R^3} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{X_i}{R^3} \sum_\ell X_\ell \partial_\ell \right\}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
[A_i, H] &= \frac{1}{\mu} \left[\sum_{jk} \epsilon_{ijk} P_j L_k - \mathbf{i}_1 \hbar P_i, H \right] - Ze^2 \left[\frac{X_i}{R}, H \right] \\
&= \frac{\eta^2 Ze^2}{\mu} \left\{ -\frac{X_i}{R^3} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{X_i}{R^3} \sum_\ell X_\ell \partial_\ell \right\} \\
&\quad - \frac{\eta^2 Ze^2}{\mu} \left(-\frac{X_i}{R^3} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{X_i}{R^3} \sum_\ell X_\ell \partial_\ell \right) = 0.
\end{aligned}$$

Calculons maintenant (22) :

$$[L_i, A_j] = \left[L_i, \frac{1}{\mu} \left(\sum_{\ell m} \epsilon_{j\ell m} P_\ell L_m - \mathbf{i}_1 \eta P_j \right) - Ze^2 \frac{X_j}{R} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \left[L_i, \frac{1}{\mu} \sum_{\ell m} \epsilon_{j\ell m} P_\ell L_m \right] + \left[L_i, -\frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu} P_j \right] + \left[L_i, -Ze^2 \frac{X_j}{R} \right] \\
&= \frac{1}{\mu} \sum_{\ell m} \epsilon_{j\ell m} [L_i, P_\ell L_m] - \frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu} [L_i, P_j] - Ze^2 [L_i, X_j R^{-1}] \\
&= \frac{1}{\mu} \sum_{\ell m} \epsilon_{j\ell m} \{ P_\ell [L_i, L_m] + [L_i, P_\ell] L_m \} - \frac{(\mathbf{i}_1 \eta)^2}{\mu} \sum_k \epsilon_{ijk} P_k \\
&\quad - Ze^2 \{ X_j [L_i, R^{-1}] + [L_i, X_j] R^{-1} \}.
\end{aligned}$$

Mais, en faisant agir sur une certaine fonction arbitraire, on voit que

$$\begin{aligned}
&\sum_{\ell m} \epsilon_{j\ell m} \{ P_\ell [L_i, L_m] + [L_i, P_\ell] L_m \} \\
&= \sum_{\ell m} \epsilon_{j\ell m} \left\{ P_\ell \mathbf{i}_1 \eta \sum_k \epsilon_{imk} L_k + \mathbf{i}_1 \eta \sum_k \epsilon_{ilk} P_k L_m \right\} \\
&= \mathbf{i}_1 \eta \left(\sum_{\ell k} \left[\sum_m \epsilon_{j\ell m} \epsilon_{kim} \right] P_\ell L_k + \sum_{mk} \left[\sum_\ell \epsilon_{mj\ell} \epsilon_{kil} \right] P_k L_m \right) \\
&= \mathbf{i}_1 \eta \left(\sum_{\ell k} [\delta_{jk} \delta_{\ell i} - \delta_{ji} \delta_{\ell k}] P_\ell L_k + \sum_{mk} [\delta_{mk} \delta_{ji} - \delta_{mi} \delta_{jk}] P_k L_m \right) \\
&= \mathbf{i}_1 \eta \left(\sum_{\ell k} \delta_{jk} \delta_{\ell i} P_\ell L_k - \sum_{\ell k} \delta_{ji} \delta_{\ell k} P_\ell L_k + \sum_{mk} \delta_{mk} \delta_{ji} P_k L_m - \sum_{mk} \delta_{mi} \delta_{jk} P_k L_m \right) \\
&= \mathbf{i}_1 \eta \left(\sum_{\ell k} \delta_{jk} \delta_{\ell i} P_\ell L_k + \sum_{\ell k} [-\delta_{ji} \delta_{\ell k} P_\ell L_k + \delta_{k\ell} \delta_{ji} P_\ell L_k] - \sum_{mk} \delta_{mi} \delta_{jk} P_k L_m \right) \\
&= \mathbf{i}_1 \eta \left(\sum_{\ell k} \delta_{jk} \delta_{\ell i} P_\ell L_k - \sum_{mk} \delta_{mi} \delta_{jk} P_k L_m \right) \\
&= \mathbf{i}_1 \eta (P_i L_j - P_j L_i) = \mathbf{i}_1 \eta \left\{ \sum_{ab} \delta_{ia} \delta_{jb} P_a L_b - \sum_{ab} \delta_{ib} \delta_{ja} P_a L_b \right\} \\
&= \mathbf{i}_1 \eta \sum_{ab} (\delta_{ia} \delta_{jb} - \delta_{ib} \delta_{ja}) P_a L_b = \mathbf{i}_1 \eta \sum_{ab} \left(\sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{abk} \right) P_a L_b \\
&= \mathbf{i}_1 \eta \sum_k \epsilon_{ijk} \sum_{ab} \epsilon_{kab} P_a L_b.
\end{aligned}$$

On sait que

$$[L_i, R^{-1}] = 0, \quad [L_i, X_j] = \mathbf{i}_1 \eta \sum_k \epsilon_{ijk} X_k.$$

On a donc

$$\begin{aligned} [L_i, A_j] &= \frac{1}{\mu} \mathbf{i}_1 \eta \sum_k \epsilon_{ijk} \sum_{ab} \epsilon_{kab} P_a L_b \\ &\quad - \frac{(\mathbf{i}_1 \eta)^2}{\mu} \sum_k \epsilon_{ijk} P_k - \frac{\mathbf{i}_1 \eta Z e^2}{R} \sum_k \epsilon_{ijk} X_k \\ &= \mathbf{i}_1 \eta \sum_k \epsilon_{ijk} \left\{ \frac{1}{\mu} \left(\sum_{ab} \epsilon_{kab} P_a L_b - \mathbf{i}_1 \eta P_k \right) - Z e^2 \frac{X_k}{R} \right\} \\ &= \mathbf{i}_1 \eta \sum_k \epsilon_{ijk} A_k. \end{aligned}$$

Pour l'expression (23),

$$\begin{aligned} [A_i, A_j] &= \left[\frac{1}{\mu} \left(\sum_{ck} \epsilon_{ick} P_c L_k - \mathbf{i}_1 \eta P_i \right) - Z e^2 \frac{X_i}{R}, \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\mu} \left(\sum_{ab} \epsilon_{jab} P_a L_b - \mathbf{i}_1 \eta P_j \right) - Z e^2 \frac{X_j}{R} \right] \\ &= \left[\frac{1}{\mu} \sum_{ck} \epsilon_{ick} P_c L_k - \frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu} P_i - \frac{Z e^2}{R} X_i, \frac{1}{\mu} \sum_{ab} \epsilon_{jab} P_a L_b - \frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu} P_j - \frac{Z e^2}{R} X_j \right] \\ &= \left[\frac{1}{\mu} \sum_{ck} \epsilon_{ick} P_c L_k, \frac{1}{\mu} \sum_{ab} \epsilon_{jab} P_a L_b - \frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu} P_j - \frac{Z e^2}{R} X_j \right] \\ &\quad + \left[-\frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu} P_i, \frac{1}{\mu} \sum_{ab} \epsilon_{jab} P_a L_b - \frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu} P_j - \frac{Z e^2}{R} X_j \right] \\ &\quad + \left[-\frac{Z e^2}{R} X_i, \frac{1}{\mu} \sum_{ab} \epsilon_{jab} P_a L_b - \frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu} P_j - \frac{Z e^2}{R} X_j \right] \\ &= \left[\frac{1}{\mu} \sum_{ck} \epsilon_{ick} P_c L_k, \frac{1}{\mu} \sum_{ab} \epsilon_{jab} P_a L_b \right] + \left[\frac{1}{\mu} \sum_{ck} \epsilon_{ick} P_c L_k, -\frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu} P_j \right] \\ &\quad + \left[\frac{1}{\mu} \sum_{ck} \epsilon_{ick} P_c L_k, -\frac{Z e^2}{R} X_j \right] + \left[-\frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu} P_i, \frac{1}{\mu} \sum_{ab} \epsilon_{jab} P_a L_b \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[-\frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu} P_i, -\frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu} P_j \right] + \left[-\frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu} P_i, -\frac{Ze^2}{R} X_j \right] + \left[-\frac{Ze^2}{R} X_i, \frac{1}{\mu} \sum_{ab} \epsilon_{jab} P_a L_b \right] \\
& + \left[-\frac{Ze^2}{R} X_i, -\frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu} P_j \right] + \left[-\frac{Ze^2}{R} X_i, -\frac{Ze^2}{R} X_j \right] \\
& = \frac{1}{\mu^2} \sum_{ckab} \epsilon_{ick} \epsilon_{jab} [P_c L_k, P_a L_b] - \frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu^2} \sum_{ck} \epsilon_{ick} [P_c L_k, P_j] \\
& - \frac{Ze^2}{\mu} \sum_{ck} \epsilon_{ick} [P_c L_k, X_j R^{-1}] - \frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu^2} \sum_{ab} \epsilon_{jab} [P_i, P_a L_b] \\
& + \frac{\mathbf{i}_1 \eta Ze^2}{\mu} [P_i, X_j R^{-1}] - \frac{Ze^2}{\mu} \sum_{ab} \epsilon_{jab} [X_i R^{-1}, P_a L_b] + \frac{\mathbf{i}_1 \eta Ze^2}{\mu} [X_i R^{-1}, P_j] \\
& = \frac{1}{\mu^2} \sum_{ckab} \epsilon_{ick} \epsilon_{jab} \{ P_c [L_k, P_a L_b] + [P_c, P_a L_b] L_k \} \\
& - \frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu^2} \sum_{ck} \epsilon_{ick} \{ P_c [L_k, P_j] + [P_c, P_j] L_k \} \\
& - \frac{Ze^2}{\mu} \sum_{ck} \epsilon_{ick} \{ P_c [L_k, X_j R^{-1}] + [P_c, X_j R^{-1}] L_k \} \\
& - \frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu^2} \sum_{ab} \epsilon_{jab} \{ P_a [P_i, L_b] + [P_i, P_a] L_b \} - \frac{\mathbf{i}_1 \eta Ze^2}{\mu} [X_j R^{-1}, P_i] \\
& - \frac{Ze^2}{\mu} \sum_{ab} \epsilon_{jab} \{ P_a [X_i R^{-1}, L_b] + [X_i R^{-1}, P_a] L_b \} + \frac{\mathbf{i}_1 \eta Ze^2}{\mu} [X_i R^{-1}, P_j] \\
& = \frac{1}{\mu^2} \sum_{ckab} \epsilon_{ick} \epsilon_{jab} P_c (P_a [L_k, L_b] + [L_k, P_a] L_b) \\
& + \frac{1}{\mu^2} \sum_{ckab} \epsilon_{ick} \epsilon_{jab} (P_a [P_c, L_b] + [P_c, P_a] L_b) L_k \\
& - \frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu^2} \sum_{ck} \epsilon_{ick} P_c [L_k, P_j] - \frac{Ze^2}{\mu} \sum_{ck} \epsilon_{ick} P_c \{ X_j [L_k, R^{-1}] + [L_k, X_j] R^{-1} \} \\
& - \frac{Ze^2}{\mu} \sum_{ck} \epsilon_{ick} \{ X_j [P_c, R^{-1}] + [P_c, X_j] R^{-1} \} L_k \\
& - \frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu^2} \sum_{ab} \epsilon_{jab} P_a [P_i, L_b] - \frac{\mathbf{i}_1 \eta Ze^2}{\mu} \{ X_j [R^{-1}, P_i] + [X_j, P_i] R^{-1} \} \\
& + \frac{\mathbf{i}_1 \eta Ze^2}{\mu} \{ X_i [R^{-1}, P_j] + [X_i, P_j] R^{-1} \} \\
& - \frac{Ze^2}{\mu} \sum_{ab} \epsilon_{jab} P_a \{ X_i [R^{-1}, L_b] + [X_i, L_b] R^{-1} \} \\
& - \frac{Ze^2}{\mu} \sum_{ab} \epsilon_{jab} \{ X_i [R^{-1}, P_a] + [X_i, P_a] R^{-1} \} L_b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\mu^2} \sum_{ckab} \epsilon_{ick} \epsilon_{jab} \{P_c [L_k, P_a] L_b + P_a [P_c, L_b] L_k\} \\
&\quad - \frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu^2} \sum_{ck} \epsilon_{ick} P_c [L_k, P_j] - \frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu^2} \sum_{ab} \epsilon_{jab} P_a [P_i, L_b] \\
&\quad - \frac{Ze^2}{\mu} \sum_{ck} \epsilon_{ick} P_c [L_k, X_j] R^{-1} - \frac{Ze^2}{\mu} \sum_{ab} \epsilon_{jab} P_a [X_i, L_b] R^{-1} \\
&\quad - \frac{Ze^2}{\mu} \sum_{ck} \epsilon_{ick} \{X_j [P_c, R^{-1}] + [P_c, X_j] R^{-1}\} L_k \\
&\quad - \frac{Ze^2}{\mu} \sum_{ab} \epsilon_{jab} \{X_i [R^{-1}, P_a] + [X_i, P_a] R^{-1}\} L_b \\
&\quad - \frac{\mathbf{i}_1 \eta Ze^2}{\mu} \{X_j [R^{-1}, P_i] + [X_j, P_i] R^{-1}\} \\
&\quad + \frac{\mathbf{i}_1 \eta Ze^2}{\mu} \{X_i [R^{-1}, P_j] + [X_i, P_j] R^{-1}\}.
\end{aligned}$$

Effectuons maintenant un calcul par morceaux. Pour la 1^{re} ligne,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu^2} \sum_{ckab} \epsilon_{ick} \epsilon_{jab} \{P_c [L_k, P_a] L_b + P_a [P_c, L_b] L_k\} \\
&= \frac{1}{\mu^2} \sum_{ckab} \epsilon_{ick} \epsilon_{jab} \left\{ \mathbf{i}_1 \eta \sum_n \epsilon_{kan} P_c P_n L_b - \mathbf{i}_1 \eta \sum_n \epsilon_{bcn} P_a P_n L_k \right\} \\
&= \frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu^2} \left\{ \sum_{ckabn} \epsilon_{ick} \epsilon_{jab} \epsilon_{kan} P_c P_n L_b - \sum_{ckabn} \epsilon_{ick} \epsilon_{jab} \epsilon_{bcn} P_a P_n L_k \right\} \\
&= \frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu^2} \left\{ \sum_{ckbn} \epsilon_{ick} \sum_a \epsilon_{bja} \epsilon_{nka} P_c P_n L_b - \sum_{ckan} \epsilon_{ick} \sum_b \epsilon_{jab} \epsilon_{cnb} P_a P_n L_k \right\} \\
&= \frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu^2} \left\{ \sum_{ckbn} \epsilon_{ick} (\delta_{bn} \delta_{jk} - \delta_{bk} \delta_{jn}) P_c P_n L_b - \sum_{ckan} \epsilon_{ick} (\delta_{jc} \delta_{an} - \delta_{jn} \delta_{ac}) P_a P_n L_k \right\} \\
&= \frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu^2} \sum_{ck} \epsilon_{ick} \left\{ \sum_{bn} (\delta_{bn} \delta_{jk} - \delta_{bk} \delta_{jn}) P_c P_n L_b - \sum_{an} (\delta_{jc} \delta_{an} - \delta_{jn} \delta_{ac}) P_a P_n L_k \right\} \\
&= \frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu^2} \sum_{ck} \epsilon_{ick} \left\{ \sum_{bn} \delta_{bn} \delta_{jk} P_c P_n L_b - \sum_{bn} \delta_{bk} \delta_{jn} P_c P_n L_b \right. \\
&\quad \left. - \sum_{an} \delta_{jc} \delta_{an} P_a P_n L_k + \sum_{an} \delta_{jn} \delta_{ac} P_a P_n L_k \right\} \\
&= \frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu^2} \sum_{ck} \epsilon_{ick} \left\{ \sum_{bn} \delta_{bn} \delta_{jk} P_c P_n L_b - \sum_{an} \delta_{jc} \delta_{an} P_a P_n L_k \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu^2} \sum_{ck} \epsilon_{ick} \left\{ \delta_{jk} \sum_n P_c P_n L_n - \delta_{jc} \sum_n P_n P_n L_k \right\} \\
&= \frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu^2} \left\{ \sum_{ck} \epsilon_{ick} \delta_{jk} \sum_n P_c P_n L_n - \sum_{ck} \epsilon_{ick} \delta_{jc} \sum_n P_n P_n L_k \right\} \\
&= \frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu^2} \left\{ \sum_c \epsilon_{icj} \sum_n P_c P_n L_n - \sum_k \epsilon_{ijk} \sum_n P_n P_n L_k \right\} \\
&= -\frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu^2} \sum_k \epsilon_{ijk} P_k \sum_n P_n L_n - \frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu^2} \sum_n P_n P_n \sum_k \epsilon_{ijk} L_k,
\end{aligned}$$

mais

$$\sum_n P_n L_n = \sum_n P_n \sum_{ab} \epsilon_{nab} X_a P_b = \sum_{nab} \epsilon_{nab} P_n X_a P_b = 0.$$

La 2^e ligne s'annule,

$$\begin{aligned}
& -\frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu^2} \sum_{ck} \epsilon_{ick} P_c [L_k, P_j] + \frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu^2} \sum_{ab} \epsilon_{jab} P_a [L_b, P_i] \\
&= -\frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu^2} \sum_{ck} \epsilon_{ick} P_c \left(\mathbf{i}_1 \eta \sum_n \epsilon_{k j n} P_n \right) + \frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu^2} \sum_{ab} \epsilon_{jab} P_a \left(\mathbf{i}_1 \eta \sum_n \epsilon_{b i n} P_n \right) \\
&= -\frac{(\mathbf{i}_1 \eta)^2}{\mu^2} \sum_{cn} \sum_k \epsilon_{ick} \epsilon_{j n k} P_c P_n + \frac{(\mathbf{i}_1 \eta)^2}{\mu^2} \sum_{an} \sum_b \epsilon_{jab} \epsilon_{i n b} P_a P_n \\
&= -\frac{(\mathbf{i}_1 \eta)^2}{\mu^2} \sum_{cn} (\delta_{ij} \delta_{cn} - \delta_{in} \delta_{cj}) P_c P_n + \frac{(\mathbf{i}_1 \eta)^2}{\mu^2} \sum_{an} (\delta_{ji} \delta_{an} - \delta_{jn} \delta_{ai}) P_a P_n \\
&= -\frac{(\mathbf{i}_1 \eta)^2}{\mu^2} \sum_{cn} \delta_{ij} \delta_{cn} P_c P_n + \frac{(\mathbf{i}_1 \eta)^2}{\mu^2} \sum_{cn} \delta_{in} \delta_{cj} P_c P_n \\
&\quad + \frac{(\mathbf{i}_1 \eta)^2}{\mu^2} \sum_{an} \delta_{ji} \delta_{an} P_a P_n - \frac{(\mathbf{i}_1 \eta)^2}{\mu^2} \sum_{an} \delta_{jn} \delta_{ai} P_a P_n \\
&= \frac{(\mathbf{i}_1 \eta)^2}{\mu^2} \sum_{cn} \delta_{in} \delta_{cj} P_c P_n - \frac{(\mathbf{i}_1 \eta)^2}{\mu^2} \sum_{an} \delta_{jn} \delta_{ai} P_a P_n \\
&= \frac{(\mathbf{i}_1 \eta)^2}{\mu^2} \{P_j P_i - P_i P_j\} = 0.
\end{aligned}$$

Pour la 3^e ligne,

$$\begin{aligned}
& -\frac{Ze^2}{\mu} \sum_{ck} \epsilon_{ick} P_c [L_k, X_j] R^{-1} - \frac{Ze^2}{\mu} \sum_{ab} \epsilon_{jab} P_a [X_i, L_b] R^{-1} \\
& = -\frac{Ze^2}{\mu} \sum_{ck} \epsilon_{ick} P_c \left(\mathbf{i}_1 \eta \sum_n \epsilon_{kjn} X_n \right) R^{-1} + \frac{Ze^2}{\mu} \sum_{ab} \epsilon_{jab} P_a \left(\mathbf{i}_1 \eta \sum_n \epsilon_{bin} X_n \right) R^{-1} \\
& = -\frac{\mathbf{i}_1 \eta Ze^2}{\mu} \sum_{cn} \sum_k \epsilon_{ick} \epsilon_{jnk} P_c X_n R^{-1} + \frac{\mathbf{i}_1 \eta Ze^2}{\mu} \sum_{an} \sum_b \epsilon_{jab} \epsilon_{inb} P_a X_n R^{-1} \\
& = -\frac{\mathbf{i}_1 \eta Ze^2}{\mu} \sum_{cn} (\delta_{ij} \delta_{cn} - \delta_{in} \delta_{cj}) P_c X_n R^{-1} + \frac{\mathbf{i}_1 \eta Ze^2}{\mu} \sum_{an} (\delta_{ji} \delta_{an} - \delta_{jn} \delta_{ai}) P_a X_n R^{-1} \\
& = -\frac{\mathbf{i}_1 \eta Ze^2}{\mu} \sum_{cn} \delta_{ij} \delta_{cn} P_c X_n R^{-1} + \frac{\mathbf{i}_1 \eta Ze^2}{\mu} \sum_{cn} \delta_{in} \delta_{cj} P_c X_n R^{-1} \\
& \quad + \frac{\mathbf{i}_1 \eta Ze^2}{\mu} \sum_{an} \delta_{ji} \delta_{an} P_a X_n R^{-1} - \frac{\mathbf{i}_1 \eta Ze^2}{\mu} \sum_{an} \delta_{jn} \delta_{ai} P_a X_n R^{-1} \\
& = \frac{\mathbf{i}_1 \eta Ze^2}{\mu} \sum_{cn} \delta_{in} \delta_{cj} P_c X_n R^{-1} - \frac{\mathbf{i}_1 \eta Ze^2}{\mu} \sum_{an} \delta_{jn} \delta_{ai} P_a X_n R^{-1} \\
& = \frac{\mathbf{i}_1 \eta Ze^2}{\mu} \{ P_j X_i R^{-1} - P_i X_j R^{-1} \}.
\end{aligned}$$

La 4^e et 5^e ligne se calculent comme suit :

$$\begin{aligned}
& -\frac{Ze^2}{\mu} \sum_{ck} \epsilon_{ick} \{ X_j [P_c, R^{-1}] + [P_c, X_j] R^{-1} \} L_k \\
& -\frac{Ze^2}{\mu} \sum_{ab} \epsilon_{jab} \{ X_i [R^{-1}, P_a] + [X_i, P_a] R^{-1} \} L_b \\
& = -\frac{Ze^2}{\mu} \sum_{ck} \epsilon_{ick} \left\{ X_j \left(\mathbf{i}_1 \eta \frac{X_c}{R^3} \right) - \mathbf{i}_1 \eta \delta_{jc} R^{-1} \right\} L_k \\
& -\frac{Ze^2}{\mu} \sum_{ab} \epsilon_{jab} \left\{ X_i \left(-\mathbf{i}_1 \eta \frac{X_a}{R^3} \right) + \mathbf{i}_1 \eta \delta_{ia} R^{-1} \right\} L_b \\
& = -\frac{\mathbf{i}_1 \eta Ze^2}{\mu} \sum_{ck} \epsilon_{ick} X_j \frac{X_c}{R^3} L_k + \frac{\mathbf{i}_1 \eta Ze^2}{\mu} \sum_{ck} \epsilon_{ick} \delta_{jc} R^{-1} L_k \\
& + \frac{\mathbf{i}_1 \eta Ze^2}{\mu} \sum_{ab} \epsilon_{jab} X_i \frac{X_a}{R^3} L_b - \frac{\mathbf{i}_1 \eta Ze^2}{\mu} \sum_{ab} \epsilon_{jab} \delta_{ia} R^{-1} L_b \\
& = \frac{\mathbf{i}_1 \eta Ze^2}{\mu} \sum_{ab} \left\{ \epsilon_{jab} X_i \frac{X_a}{R^3} L_b - \epsilon_{iab} X_j \frac{X_a}{R^3} L_b \right\} + \frac{2\mathbf{i}_1 \eta Ze^2}{\mu} \sum_{jk} \epsilon_{ijk} R^{-1} L_k,
\end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned}
& \sum_{ab} \left\{ \epsilon_{jab} X_i \frac{X_a}{R^3} L_b - \epsilon_{iab} X_j \frac{X_a}{R^3} L_b \right\} \\
&= \sum_{ab} \left\{ \epsilon_{jab} X_i \frac{X_a}{R^3} \sum_{cd} \epsilon_{bcd} X_c P_d - \epsilon_{iab} X_j \frac{X_a}{R^3} \sum_{cd} \epsilon_{bcd} X_c P_d \right\} \\
&= \sum_{acd} \sum_b \epsilon_{jab} \epsilon_{cdb} X_i \frac{X_a}{R^3} X_c P_d - \sum_{acd} \sum_b \epsilon_{iab} \epsilon_{cdb} X_j \frac{X_a}{R^3} X_c P_d \\
&= \sum_{acd} (\delta_{jc} \delta_{ad} - \delta_{jd} \delta_{ac}) X_i \frac{X_a}{R^3} X_c P_d - \sum_{acd} (\delta_{ic} \delta_{ad} - \delta_{id} \delta_{ac}) X_j \frac{X_a}{R^3} X_c P_d \\
&= \sum_{acd} \delta_{jc} \delta_{ad} X_i \frac{X_a}{R^3} X_c P_d - \sum_{acd} \delta_{jd} \delta_{ac} X_i \frac{X_a}{R^3} X_c P_d \\
&\quad - \sum_{acd} \delta_{ic} \delta_{ad} X_j \frac{X_a}{R^3} X_c P_d + \sum_{acd} \delta_{id} \delta_{ac} X_j \frac{X_a}{R^3} X_c P_d \\
&= \sum_a X_i \frac{X_a}{R^3} X_j P_a - \sum_a X_i \frac{X_a}{R^3} X_a P_j - \sum_a X_j \frac{X_a}{R^3} X_i P_a + \sum_a X_j \frac{X_a}{R^3} X_a P_i \\
&= X_j R^{-1} P_i - X_i R^{-1} P_j.
\end{aligned}$$

La 6^e ligne s'annule avec la 7^e car

$$\begin{aligned}
& - \frac{\mathbf{i}_1 \eta Z e^2}{\mu} \{ X_j [R^{-1}, P_i] + [X_j, P_i] R^{-1} \} \\
& + \frac{\mathbf{i}_1 \eta Z e^2}{\mu} \{ X_i [R^{-1}, P_j] + [X_i, P_j] R^{-1} \} \\
&= - \frac{\mathbf{i}_1 \eta Z e^2}{\mu} \left\{ X_j \left(-\mathbf{i}_1 \eta \frac{X_i}{R^3} \right) + \mathbf{i}_1 \eta \delta_{ji} R^{-1} \right\} \\
& + \frac{\mathbf{i}_1 \eta Z e^2}{\mu} \left\{ X_i \left(-\mathbf{i}_1 \eta \frac{X_j}{R^3} \right) + \mathbf{i}_1 \eta \delta_{ij} R^{-1} \right\} = 0.
\end{aligned}$$

En regroupant tous ces résultats ensemble, on a

$$\begin{aligned}
& [A_i, A_i] \\
&= - \frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu^2} \sum_n P_n P_n \sum_k \epsilon_{ijk} L_k + \frac{2\mathbf{i}_1 \eta Z e^2}{\mu R} \sum_{jk} \epsilon_{ijk} L_k \\
& + \frac{\mathbf{i}_1 \eta Z e^2}{\mu} \{ P_j X_i R^{-1} - P_i X_j R^{-1} + X_j R^{-1} P_i - X_i R^{-1} P_j \}
\end{aligned}$$

et finalement,

$$\begin{aligned}
& P_j X_i R^{-1} - P_i X_j R^{-1} + X_j R^{-1} P_i - X_i R^{-1} P_j \\
&= P_j X_i R^{-1} - (X_j P_i - \mathbf{i}_1 \eta \delta_{ji} I) R^{-1} + X_j P_i R^{-1} - (\mathbf{i}_1 \eta \delta_{ji} I + P_j X_i) R^{-1} \\
&= P_j X_i R^{-1} - X_j P_i R^{-1} + \mathbf{i}_1 \eta \delta_{ji} R^{-1} + X_j P_i R^{-1} - \mathbf{i}_1 \eta \delta_{ji} R^{-1} - P_j X_i R^{-1} = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, on trouve

$$\begin{aligned}
[A_i, A_i] &= -\frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu^2} \sum_n P_n P_n \sum_k \epsilon_{ijk} L_k + \frac{2\mathbf{i}_1 \eta Z e^2}{\mu R} \sum_{jk} \epsilon_{ijk} L_k \\
&= -\frac{2\mathbf{i}_1 \eta}{\mu} \left\{ \frac{1}{2\mu} \sum_n P_n P_n - \frac{Z e^2}{R} \right\} \sum_k \epsilon_{ijk} L_k \\
&= -\frac{2\mathbf{i}_1 \eta}{\mu} H \sum_k \epsilon_{ijk} L_k.
\end{aligned}$$

Pour la relation (24), nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_i L_i A_i &= \sum_i L_i \left\{ \frac{1}{\mu} \left(\sum_{ck} \epsilon_{ick} P_c L_k - \mathbf{i}_1 \eta P_i \right) - Z e^2 \frac{X_i}{R} \right\} \\
&= \frac{1}{\mu} \sum_{ick} \epsilon_{ick} L_i P_c L_k - \frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu} \sum_i L_i P_i - \frac{Z e^2}{R} \sum_i L_i X_i \\
&= -\frac{Z e^2}{R} \sum_{iab} \epsilon_{iab} X_a P_b X_i = -\frac{Z e^2}{R} \sum_{abi} \epsilon_{abi} X_a P_b X_i = 0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_i A_i L_i &= \sum_i \left\{ \frac{1}{\mu} \left(\sum_{ck} \epsilon_{ick} P_c L_k - \mathbf{i}_1 \eta P_i \right) - Z e^2 \frac{X_i}{R} \right\} L_i \\
&= \frac{1}{\mu} \sum_{ick} \epsilon_{ick} P_c L_k L_i - \frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu} \sum_i P_i L_i - \frac{Z e^2}{R} \sum_i X_i L_i \\
&= \frac{1}{\mu} \sum_{cki} \epsilon_{cki} P_c L_k L_i - \frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu} \sum_i P_i \sum_{ab} \epsilon_{iab} X_a P_b - \frac{Z e^2}{R} \sum_i X_i \sum_{ab} \epsilon_{iab} X_a P_b \\
&= -\frac{\mathbf{i}_1 \eta}{\mu} \sum_{iab} \epsilon_{iab} P_i X_a P_b - \frac{Z e^2}{R} \sum_{iab} \epsilon_{iab} X_i X_a P_b = 0.
\end{aligned}$$

L'expression (25) se calcule comme suit. On commence par montrer une conséquence directe du théorème (B6). Soit

$$\begin{aligned}\sum_{jk} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ajk} &= \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{ajk} = \sum_j (\delta_{ia} \delta_{jj} - \delta_{ij} \delta_{ja}) \\ &= \sum_j \delta_{ia} \delta_{jj} - \sum_j \delta_{ij} \delta_{ja} = \sum_j \delta_{ia} - \delta_{ia} = 3\delta_{ia} - \delta_{ia} = 2\delta_{ia},\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}(\mathbf{L} \times \mathbf{P})_i &= \sum_{jk} \epsilon_{ijk} L_j P_k = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \left(\mathbf{i}_1 \eta \sum_a \epsilon_{jka} P_a + P_k L_j \right) \\ &= \mathbf{i}_1 \eta \sum_{ajk} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ajk} P_a + \sum_{jk} \epsilon_{ijk} P_k L_j \\ &= \mathbf{i}_1 \eta \sum_a 2\delta_{ia} P_a - \sum_{kj} \epsilon_{ikj} P_k L_j = 2\mathbf{i}_1 \eta P_i - (\mathbf{P} \times \mathbf{L})_i.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{A} &= \left\{ \frac{1}{2\mu} (\mathbf{P} \times \mathbf{L} - \mathbf{L} \times \mathbf{P}) - Ze^2 \frac{\mathbf{R}}{R} \right\}^2 \\ &= \frac{1}{4\mu^2} (\mathbf{P} \times \mathbf{L} - \mathbf{L} \times \mathbf{P})^2 - \frac{Ze^2}{2\mu} (\mathbf{P} \times \mathbf{L} - \mathbf{L} \times \mathbf{P}) \cdot \frac{\mathbf{R}}{R} \\ &\quad - \frac{Ze^2}{2\mu} \frac{\mathbf{R}}{R} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{L} - \mathbf{L} \times \mathbf{P}) + (Ze^2)^2 \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}}{R^2}.\end{aligned}$$

On évalue séparément

$$\begin{aligned}(\mathbf{P} \times \mathbf{L} - \mathbf{L} \times \mathbf{P})^2 &= (\mathbf{P} \times \mathbf{L} - [2\mathbf{i}_1 \eta \mathbf{P} - (\mathbf{P} \times \mathbf{L})])^2 = 4(\mathbf{P} \times \mathbf{L} - \mathbf{i}_1 \eta \mathbf{P})^2 \\ &= 4[\mathbf{P} \times \mathbf{L} - \mathbf{i}_1 \eta \mathbf{P}] \cdot [\mathbf{P} \times \mathbf{L} - \mathbf{i}_1 \eta \mathbf{P}] \\ &= 4\{(\mathbf{P} \times \mathbf{L})^2 - \mathbf{i}_1 \eta [(\mathbf{P} \times \mathbf{L}) \cdot \mathbf{P} + \mathbf{P} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{L})] + (\mathbf{i}_1 \eta)^2 \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}\}.\end{aligned}$$

En brisant encore en morceaux,

$$(\mathbf{P} \times \mathbf{L})^2$$

$$\begin{aligned}
&= [\mathbf{P} \times \mathbf{L}] \cdot [\mathbf{P} \times \mathbf{L}] = \sum_i \sum_{jk} \epsilon_{ijk} P_j L_k \sum_{ab} \epsilon_{iab} P_a L_b \\
&= \sum_{jkab} \sum_i \epsilon_{jki} \epsilon_{abi} P_j L_k P_a L_b = \sum_{jkab} (\delta_{ja} \delta_{kb} - \delta_{jb} \delta_{ka}) P_j L_k P_a L_b \\
&= \sum_{jkab} \delta_{ja} \delta_{kb} P_j L_k P_a L_b - \sum_{jkab} \delta_{jb} \delta_{ka} P_j L_k P_a L_b \\
&= \sum_{jk} P_j L_k P_j L_k - \sum_{jk} P_j L_k P_k L_j = \sum_{jk} P_j L_k P_j L_k - \sum_j P_j \left\{ \sum_k L_k P_k \right\} L_j \\
&= \sum_{jk} P_j \left(\mathbf{i}_1 \eta \sum_a \epsilon_{kja} P_a + P_j L_k \right) L_k = \mathbf{i}_1 \eta \sum_{jak} \epsilon_{jak} P_j P_a L_k + \sum_{jk} P_j P_j L_k L_k \\
&= \sum_j P_j P_j \sum_k L_k L_k = [\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}] [\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}].
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{P} \times \mathbf{L}) \cdot \mathbf{P} &= \sum_i (\mathbf{P} \times \mathbf{L})_i P_i = \sum_{iab} \epsilon_{iab} P_a L_b P_i \\
&= \sum_{iab} \epsilon_{iab} P_a \left(\mathbf{i}_1 \eta \sum_c \epsilon_{bic} P_c + P_i L_b \right) = \mathbf{i}_1 \eta \sum_{iabc} \epsilon_{iab} \epsilon_{bic} P_a P_c + \sum_{iab} \epsilon_{iab} P_a P_i L_b \\
&= \mathbf{i}_1 \eta \sum_{ac} \sum_{bi} \epsilon_{abi} \epsilon_{cbi} P_a P_c = 2 \mathbf{i}_1 \eta \sum_{ac} \delta_{ac} P_a P_c = 2 \mathbf{i}_1 \eta \sum_a P_a P_a = 2 \mathbf{i}_1 \eta \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}
\end{aligned}$$

et

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{L}) = \sum_i P_i (\mathbf{P} \times \mathbf{L})_i = \sum_i P_i \sum_{ab} \epsilon_{iab} P_a L_b = \sum_{iab} \epsilon_{iab} P_i P_a L_b = 0.$$

En rassemblant les termes ensemble,

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{P} \times \mathbf{L} - \mathbf{L} \times \mathbf{P})^2 \\
&= 4 \{ [\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}] [\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}] - \mathbf{i}_1 \eta (2 \mathbf{i}_1 \eta \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}) + (\mathbf{i}_1 \eta)^2 \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} \} \\
&= 4 \{ [\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}] [\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}] + (\eta)^2 \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} \} = 4 [\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}] \{ \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} + (\eta)^2 \}.
\end{aligned}$$

Les autres termes sont traités de la façon suivante :

$$(\mathbf{P} \times \mathbf{L} - \mathbf{L} \times \mathbf{P}) \cdot \frac{\mathbf{R}}{R} = 2(\mathbf{P} \times \mathbf{L} - \mathbf{i}_1 \eta \mathbf{P}) \cdot \frac{\mathbf{R}}{R} = 2 \left\{ (\mathbf{P} \times \mathbf{L}) \cdot \frac{\mathbf{R}}{R} - \mathbf{i}_1 \eta \mathbf{P} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R} \right\},$$

avec l'utilisation des résultats

$$\left[\frac{X_i}{R}, L_b \right] = X_i \underbrace{[R^{-1}, L_b]}_0 + [X_i, L_b] R^{-1} = \mathbf{i}_1 \eta \sum_{\ell} \epsilon_{ib\ell} \frac{X_{\ell}}{R}$$

et

$$\left[P_a, \frac{X_i}{R} \right] = -\mathbf{i}_1 \eta \partial_a \frac{X_i}{R} = -\mathbf{i}_1 \eta \left\{ \frac{\delta_{ai}}{R} - \frac{X_i X_a}{R^3} \right\},$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{P} \times \mathbf{L}) \cdot \frac{\mathbf{R}}{R} &= \sum_{iab} \epsilon_{iab} P_a L_b \frac{X_i}{R} = \sum_{iab} \epsilon_{iab} P_a \left(\frac{X_i}{R} L_b - \mathbf{i}_1 \eta \sum_{\ell} \epsilon_{ib\ell} \frac{X_{\ell}}{R} \right) \\ &= \sum_{iab} \epsilon_{iab} P_a \frac{X_i}{R} L_b - \mathbf{i}_1 \eta \sum_{iab\ell} \epsilon_{iab} \epsilon_{ib\ell} P_a \frac{X_{\ell}}{R} \\ &= \sum_{iab} \epsilon_{iab} \left[-\mathbf{i}_1 \eta \left\{ \frac{\delta_{ai}}{R} - \frac{X_i X_a}{R^3} \right\} + \frac{X_i}{R} P_a \right] L_b + \mathbf{i}_1 \eta \sum_{a\ell} \sum_{ib} \epsilon_{aib} \epsilon_{ib\ell} P_a \frac{X_{\ell}}{R} \\ &= \left\{ -\frac{\mathbf{i}_1 \eta}{R} \sum_{iab} \delta_{ai} \epsilon_{iab} + \frac{\mathbf{i}_1 \eta}{R^3} \sum_{iab} \epsilon_{iab} X_i X_a + \sum_{iab} \epsilon_{iab} \frac{X_i}{R} P_a \right\} L_b + 2\mathbf{i}_1 \eta \sum_{a\ell} \delta_{a\ell} P_a \frac{X_{\ell}}{R} \\ &= \sum_{iab} \epsilon_{iab} \frac{X_i}{R} P_a L_b + 2\mathbf{i}_1 \eta \sum_a P_a \frac{X_a}{R} = \frac{1}{R} \sum_b \left(\sum_{ia} \epsilon_{bia} X_i P_a \right) L_b + 2\mathbf{i}_1 \eta \mathbf{P} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R} \\ &= \frac{1}{R} \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} + 2\mathbf{i}_1 \eta \mathbf{P} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R}. \end{aligned}$$

Ceci nous permet de déterminer que

$$\begin{aligned} (\mathbf{P} \times \mathbf{L} - \mathbf{L} \times \mathbf{P}) \cdot \frac{\mathbf{R}}{R} &= 2 \left\{ (\mathbf{P} \times \mathbf{L}) \cdot \frac{\mathbf{R}}{R} - \mathbf{i}_1 \eta \mathbf{P} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R} \right\} \\ &= 2 \left\{ \frac{1}{R} \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} + 2\mathbf{i}_1 \eta \mathbf{P} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R} - \mathbf{i}_1 \eta \mathbf{P} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R} \right\} = 2 \left\{ \frac{1}{R} \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} + \mathbf{i}_1 \eta \mathbf{P} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R} \right\}. \end{aligned}$$

On a également,

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{R}}{R} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{L} - \mathbf{L} \times \mathbf{P}) &= \frac{\mathbf{R}}{R} \cdot 2(\mathbf{P} \times \mathbf{L} - \mathbf{i}_1 \eta \mathbf{P}) \\ &= 2 \left\{ \frac{\mathbf{R}}{R} \cdot [\mathbf{P} \times \mathbf{L}] - \mathbf{i}_1 \eta \frac{\mathbf{R}}{R} \cdot \mathbf{P} \right\},\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{R}}{R} \cdot [\mathbf{P} \times \mathbf{L}] &= \sum_i \frac{X_i}{R} \sum_{ab} \epsilon_{iab} P_a L_b = \sum_{iab} \epsilon_{iab} \frac{X_i}{R} P_a L_b \\ &= \frac{1}{R} \sum_b \left[\sum_{ia} \epsilon_{bia} X_i P_a \right] L_b = \frac{1}{R} \sum_b L_b L_b = \frac{1}{R} \mathbf{L} \cdot \mathbf{L},\end{aligned}$$

donc

$$\frac{\mathbf{R}}{R} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{L} - \mathbf{L} \times \mathbf{P}) = 2 \left\{ \frac{1}{R} \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} - \mathbf{i}_1 \eta \frac{\mathbf{R}}{R} \cdot \mathbf{P} \right\}.$$

Qui plus est, on a trivialement

$$\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}}{R^2} = 1.$$

Par conséquent, en rassemblant tous ces résultats,

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{A} &= \frac{1}{\mu^2} [\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}] \{ \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} + (\eta)^2 \} - \frac{Ze^2}{\mu} \left\{ \frac{1}{R} \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} + \mathbf{i}_1 \eta \mathbf{P} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R} \right\} \\ &\quad - \frac{Ze^2}{\mu} \left\{ \frac{1}{R} \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} - \mathbf{i}_1 \eta \frac{\mathbf{R}}{R} \cdot \mathbf{P} \right\} + (Ze^2)^2 \\ &= (Ze^2)^2 + \frac{1}{\mu^2} [\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}] \{ \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} + (\eta)^2 \} - \frac{2Ze^2}{\mu R} \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} - \frac{\mathbf{i}_1 \eta Ze^2}{\mu} \left[\mathbf{P} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{\mathbf{R}}{R} \cdot \mathbf{P} \right],\end{aligned}$$

mais

$$\left[\mathbf{P}, \frac{\mathbf{R}}{R} \right] = \sum_i \left[P_i, \frac{X_i}{R} \right] = \sum_i \left\{ -\mathbf{i}_1 \eta \left[\frac{1}{R} - \frac{X_i X_i}{R^3} \right] \right\} = -\mathbf{i}_1 \eta \left\{ \frac{3}{R} - \frac{1}{R} \right\} = -2\mathbf{i}_1 \eta \frac{1}{R},$$

donc

$$\begin{aligned}
A^2 &= (Ze^2)^2 + \frac{1}{\mu^2} P^2 \{L^2 + (\eta)^2\} - \frac{2Ze^2}{\mu R} L^2 - \frac{\mathbf{i}_1 \eta Ze^2}{\mu} \left[-2\mathbf{i}_1 \eta \frac{1}{R} \right] \\
&= (Ze^2)^2 + \frac{1}{\mu^2} P^2 \{L^2 + (\eta)^2\} - \frac{2Ze^2}{\mu R} \{L^2 + (\eta)^2\} \\
&= (Ze^2)^2 + \left[\frac{1}{\mu^2} P^2 - \frac{2Ze^2}{\mu R} \right] \{L^2 + (\eta)^2\} \\
&= (Ze^2)^2 + \frac{2}{\mu} \left[\frac{1}{2\mu} P^2 - \frac{Ze^2}{R} \right] \{L^2 + (\eta)^2\} \\
&= (Ze^2)^2 + \frac{2}{\mu} H \{L^2 + (\eta)^2\}. \quad \square
\end{aligned}$$